UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES - ADE

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

MODELOS ESTOCÁSTICOS APLICADOS A LOS SEGUROS DE VIDA

Autor: Shenghua Zhang

Directors: Dr. Josep Vives
Dr. Antonio Alegre Escolano

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
Departament de Matemàtica Económica Financera i Actuarial

Barcelona, 19 de enero de 2018

Abstract

The book by Antonio Alegre Escolano *"VALORACIÓN ACTUARIAL DE PRESTACIONES RELACIONADAS CON LA INVALIDEZ"* consists in the study of actuarial operations related to the survival or death of a person, taking into account the additional contingency of invalidation.

Our idea is to modify the 1st and 3rd hypotheses of the basic model, that is, there is the possibility of returning to the activity. In addition, it has a maximum retirement age, and invalidation can only occur before reaching this age.

From this new model, we intend to study the effects of the principle in the discrete approach, for example: two new actuarial probabilities ${}_np_x^{ia}$, ${}_np_x^{ii}$; their corresponding deferred capitals ${}_nE_x^{ia}$, ${}_nE_x^{ii}$; the transition matrix (by Markov); related actuarial operations, etc.

Resumen

El libro de Antonio Alegre Escolano *"VALORACIÓN ACTUARIAL DE PRESTACIONES RELACIONADAS CON LA INVALIDEZ"* consiste en estudiar operaciones actuariales relacionadas con la supervivencia o fallecimiento de una persona, teniendo en cuenta la contingencia adicional de invalidación.

Nuestra idea es modificar la 1^a y la 3^a hipótesis de este modelo básico, o sea, existe la posibilidad de retorno a la actividad. Además, fijamos una edad máxima x_m (edad de jubilación), y la invalidación solo puede producirse antes de cumplir esta edad.

A partir de este nuevo modelo, pretendemos estudiar los efectos del inicial en enfoque discreto, por ejemplo: dos nuevas probabilidades actuariales ${}_np_x^{ia}$, ${}_np_x^{ii}$; sus capitales diferidos correspondientes ${}_nE_x^{ia}$, ${}_nE_x^{ii}$; la matriz de transición (de Markov); rentas o operaciones actuariales relacionadas, etc.

Agradecimientos

En primer lugar, quería agradecer muy sinceramente a mis tutores. Sin ellos no hubiera podido realizar este trabajo. Gracias a Dr. Antonio Alegre por elegir el tema, por explicar conceptos actuariales y por compartir experiencia suya. Gracias a Dr. Josep Vives por correción ortográfica, por consejos sobre redación matemática y por su paciencia.

También me gustaría expresar mi agradecimiento a mi familia y amigos por su apoyo y confianza.

He tenido tanta suerte que con ellos he sido capaz de acabar el trabajo.

Índice

1. Introducción

«Encontrar un tema para trabajo final de doble grado, ADE y Matemáticas, va a costar.»

Eso fue mi primer pensamiento sobre TFG. Cuando estaba cursando el penúltimo año de la carrera, me encontré con la asignatura Matemática del Seguro,

«Este puede ser el tema de mi TFG, quería hacer algo sobre seguros de vida.»

Así que hablé con la profesora y me dirigió a Antonio Alegre Escolano, luego encontré otro tutor en la Facultad de Matemáticas, Josep Vives. Así era el principio de mi historia sobre el TFG.

El libro de Antonio Alegre Escolano *"VALORACIÓN ACTUARIAL DE PRESTACIONES RELACIONADAS CON LA INVALIDEZ"* consiste en estudiar operaciones actuariales relacionadas con la supervivencia o fallecimiento de una persona (Esta parte corresponde a la asignatura Matemática del Seguro), teniendo en cuenta la situación de la misma ante la contingencia adicional de invalidación.

Observamos que las hipótesis de este modelo básico son:

1. No se considera la posibilidad de retorno a la actividad.
2. Se considera que para cualquier edad, bajo la contingencia de invalidez, todo superviviente es activo o inválido.
3. Se considera que la contingencia de invalidación puede darse en un activo de cualquier edad.

Nuestra idea es cambiar la 1a hipótesis, o sea, existe la posibilidad de retorno a la actividad. Además, fijamos una edad máxima x_m (edad de jubilación), y la invalidación solo puede producirse antes de cumplir esta edad (modificación de hipótesis 3).

A partir de este nuevo modelo, pretendemos estudiar todos los efectos del modelo inicial:

Ahora no solo tenemos las probabilidades actuariales anteriores ${}_np_x({}_nq_x)$, ${}_np_x^a({}_nq_x^a)$, ${}_np_x^{aa}({}_nq_x^{aa})$, ${}_np_x^{ai}({}_nq_x^{ai})$, ${}_np_x^i({}_nq_x^i)$, sino también dos nuevas asociadas a la invalidez:

- ${}_np_x^{ia}$: probabilidad de que una persona inválida de edad x se active entre las edades x y $x+n$, y llegue viva e activa a la edad $x+n$.
- ${}_np_x^{ii}$: probabilidad de que una persona inválida de edad x continúe viva y inválida en la edad $x+n$.

De manera que surgen dos nuevos capitales diferidos correspondientes ${}_nE_x^{ia}$, ${}_nE_x^{ii}$.

Es fácil de deducir que la matriz de transición (de Markov) con 3 estados (actividad, invalidez y fallecimiento) en el modelo básico es triangular superior porque una persona inválida no puede volver a activarse, y por lo tanto, son ceros los elementos por debajo de su diagonal. Pero en este caso, ya no es diagonal. Si es posible, intentaremos generalizarla.

Tener en cuenta que todo esto lo estudiaremos en el enfoque discreto.

2. Conceptos iniciales de seguros de vida

Consideramos una persona de edad x. Claramente $x \in \mathbb{N}$. Definimos su *nacimiento* si $x = 0$.

2.1. Variables aleatorias actuariales y sus probabilidades

Definición 2.1.1. *Definimos T una variable aleatoria como "vida residual de una persona", entonces $T(x)$ es la* ***vida residual de la persona de edad x*** *y $x+T(x)$ es* ***edad de fallecimiento*** *de dicha persona.*

Observación 2.1.1. Consideramos T como una variable aleatoria discreta, o sea, $T(x)$ será número total (entero) de años que vivirá la persona de edad x.

Definición 2.1.2. *Sea $F(t) = Pr(T \leq t)$, $t \geq 0$, la función de distribución de T. Llamamos* ***función de supervivencia*** *(o* ***distribución actuarial****) $S(t)$, su complementaria a 1, es decir, $S(t) = 1 - F(t)$.*

Notación 2.1.

1. ${}_tq_x = F(t)$.
   "Probabilidad de que una persona de edad x fallezca en t próximos años."
2. ${}_tp_x = S(t) = 1 - F(t)$.
   "Probabilidad de que una persona de edad x llegue viva en x+t."
3. *Si $t = 1$, escribimos q_x y p_x en lugar de ${}_1q_x$ y ${}_1p_x$, indican la probablidad de una persona de edad x fallezca en el próximo año, y la probabilidad de dicha persona llegue viva en x+1, respectivamente.*
4. *Usaremos ω en lugar de ∞, para expresar "infinito actuarial". Obviamente nadie estará vivo en ω.*

Proposición 2.1.1.

1. $S(0) = {}_0p_x = 1, S(\omega) = {}_\omega p_x = 0$.
2. *$S(t)$ es no creciente.*
3. *$S(t)$ es continua por la derecha.*
4. ${}_tp_\omega = 0$, ${}_tq_\omega = 1$, $\forall\, t \geq 0$.

Demostración. La demostracón de las tres primeras es aplicar las propiedades de la función de distribución $F(t)$.Y la 4, efectivamente, una persona de edad ω (infinito actuarial) ya no estará viva y fallecerá antes de ω. □

2.2. Función de cohorte

En este subcapítulo vamos a ver un concepto muy importante en el mundo actuarial, el de *tabla de mortalidad*. Las tablas de mortalidad muestran la edad, el número de muertes (mortalidad) así como otras informaciones que se producen en un determinado territorio geográfico. Os recomiendo leer [3], un libro editado por nuestra universidad. Está muy bien explicado este tema.

Definición 2.2.1. *Sea $x_0 \in \mathbb{N}$ una edad inicial de un colectivo, definimos* ***función de cohorte*** *$l_{x_0}(x)$ como número total de personas vivas a una determinada edad x. Si $x_0 = 0$, decimos que $l_0(0)$ es una* ***generación*** *(número de personas que nacen).*

Notación 2.2. *En caso práctico, dado x_0, y para simplificar la notación, escribimos solo $l(x)$ o l_x en lugar de $l_{x_0}(x)$.*

Ejemplo 2.3.

1. Determinar un colectivo teórico y su evolución (funciones de cohorte) a partir de una base y distribuciones de una tabla de mortalidad.

   Sea l_0 un colectivo ficticio (base),

$$
\begin{aligned}
l(1) &= l_0(1-q_0),\\
l(2) &= l(1)(1-q_1) = l_0(1-q_0)(1-q_1),\\
&\vdots\\
l(k) &= l(k-1)(1-q_{k-1}) = l_0(1-q_0)\dots(1-q_{k-1}),\\
&\vdots\\
l(\omega) &= l(\omega-1)(1-q_{\omega-1}) = l(\omega-1)(1-1) = 0
\end{aligned}
$$

   Cogemos distribuciones (q_x) de las tablas españolas PASEM 2010 (comienza en la edad $x_0 = 0$)[1] y supongamos una base $l_0 = 1.000.000$, obtendremos:

x	...	q_x	**l(x)**
0	...	0,005807	**1.000.000,000**
1	...	0,000418	994.193,000
2	...	0,000349	993.777,427
3	...	0,000287	993.430,599
⋮	⋮	⋮	⋮
111	...	0,987609	0,00004489
112	...	1,000000	0,00000056
113	...	1,000000	0

Cuadro 1: Colectivo teórico a partir de PASEM 2010 (hombres)

[1] Las tablas de mortalidad no tienen por qué comenzar en la edad $x_0 = 0$, por ejemplo, en las suizas GRM/F-95 la edad inicial es $x_0 = 15$.

x	...	q_x	l(x)
0	...	0,004744	**1.000.000,000**
1	...	0,000376	995.256,000
2	...	0,000307	994.881,783
3	...	0,000245	994.576,355
⋮	⋮	⋮	⋮
111	...	0,973152	0,00043496
112	...	1,000000	0,00001678
113	...	1,000000	0

Cuadro 2: Colectivo teórico a partir de PASEM 2010 (Mujeres)

Ya sabemos que los hombres viven menos que las mujeres en casi todos los países del mundo.[2] Lo podemos ver con las tablas anteriores y comparar los q_x's (mayores en los hombres) o $l(x)$'s (menores en los hombres). Representamos gráficamente los dos colectivos:

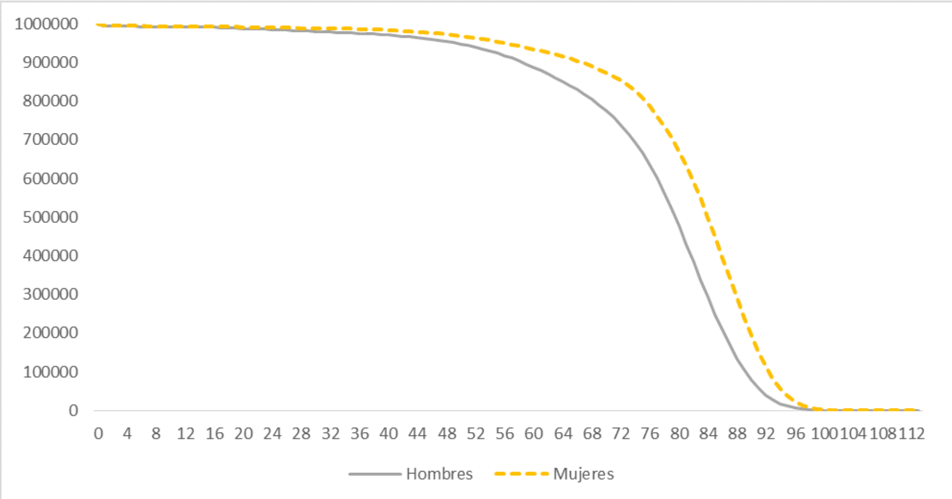


Figura 1: Función $l(x)$ a partir de PASEM 2010

Observamos que, efectivamente, la función de las mujeres está encima de la de los hombres en todas las edades [3], pero tener en cuenta que no hay mucha diferencia al principio, porque las mortalidades de que nacen para los dos son muy similares; y pasa lo mismo en las últimas edades dado que entonces ya quedan muy pocas personas vivas.

[2]En España, la brecha de género (la diferencia en la esperanza de vida entre hombres y mujeres) es de 5,7 años, aunque se ha ido recortando en los últimos años.

[3]Consultar la tabla completa en Annexo [5].

Comentarios:

El Tribunal de Justicia Europeo ha prohibido definitivamente que, a partir de diciembre de 2012, las empresas aseguradoras utilicen el criterio del sexo en el cálculo del precio de las primas (Vemos en el Subcapítulo 2.3), a fin de conseguir "la igualdad de trato entre hombres y mujeres".

Según un estudio de la consultora Oxera para la patronal aseguradora europea CEA, el mayor impacto se producirá en el seguro de vida de riesgo, donde las mujeres, debido a la mayor esperanza de vida, pagan primas más bajas para que sus familiares reciban una indemnización en caso de fallecimiento, y que con la nueva legislación subirán hasta un 34 % para las que tengan alrededor de cuarenta años.

Perjudicará también a los hombres en los seguros de rentas vitalicias, que ahora cobran rentas mayores porque suelen vivir menos años.

Y ahora se cumple "la igualdad de trato entre hombres y mujeres"? No podemos ignorar los efectos que producen. Personalmente, creo que no es justo ni conveniente desde punto de vista de ciencia actuarial.

2. Aproximar distribuciones actuariales con tablas de mortalidad.

   Ya sabemos que la función de supervivencia $S(t) = {}_tp_x$ es la probabilidad de que una persona de edad x llegue viva en $x+t$, y cualquier probabilidad es el cociente entre casos favorables y casos posibles, entonces:

$$ {}_tp_x = \frac{l(x+t)}{l(x)} \tag{2.1} $$

   Claramente es una aproximación ya que los casos favorables son el número total de personas vivas a la edad $x+t$ y los casos posibles son número total las vivas a la edad x.

   En el ejemplo anterior,

x	...	q_x	$l(x)$	$\mathbf{p_x}$
0	...	0,005807	1.000.000,000	0,994193
1	...	0,000418	994.193,000	0,999582
2	...	0,000349	993.777,427	0,999651
3	...	0,000287	993.430,599	0,999713
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
111	...	0,987609	0,00004489	0,012391
112	...	1,000000	0,00000056	0
113	...	1,000000	0	0

Cuadro 3: Distribuciones actuariales a partir de la PASEM 2010 (hombres)

2.3. Funciones elementales de valoración actuarial

Ya hemos estudiado las probablidades *temporales* de supervivencia y de fallecimiento:

- ${}_np_x$: "Probabilidad de que una persona de edad x llegue viva en $x+n$,"
- ${}_nq_x$: "Probabilidad de que una persona de edad x fallezca en n próximos años,"

donde n le llamamos su **temporalidad**.
Antes de definir las funciones elementales de valoración actuarial, introducimos los conceptos de probabilidad diferida y mixta, así como algunas propiedades básicas que vamos a usar más adelante.

Definición 2.3.1. *Llamamos* ***probabilidad diferida de fallecimiento*** ${}_{m/}q_x$*, la probabilidad de que la persona de edad x fallezca entre x+m y x+m+1, donde m le llamamos su* ***diferimiento****. De la misma manera definimos* ***probabilidad temporal y diferida (o mixta) de fallecimiento*** ${}_{m/n}q_x$*, la probabilidad de que la persona de edad x fallezca entre x+m y x+m+n,*

Observación 2.3.1. No es necesario definir *probabilidad temporal y diferida (o mixta) de supervivencia* ya que una persona de edad x, para que esté viva entre $x+m$ y $x+m+n$ necesariamente tenia que estar viva antes de $x+m$, es decir,

$$ {}_{m/n}p_x = \frac{l(x+m+n)}{l(x)} = {}_{m+n}p_x $$

Propiedad 2.3.1.

1. ${}_np_x = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$

2. ${}_nq_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}q_x, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$

3. ${}_np_x = {}_kp_x \cdot {}_{n-k}p_{x+k}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N},\ k \leq n.$ *(Propiedad de escindibilidad* [4]*)*

4. ${}_{m/n}q_x = {}_mp_x \cdot {}_nq_{x+m}, \ \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$

5. ${}_{m/n}q_x = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x, \ \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$

Demostración.

1.
$$ {}_np_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l(x+1)}{l(x)}\frac{l(x+2)}{l(x+1)} \cdots \frac{l(x+n-1)}{l(x+n-2)}\frac{l(x+n)}{l(x+n-1)} $$
$$ = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-2} \cdot p_{x+n-1} = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t} $$

[4]Una probabilidad temporal es escindible cuando la podemos calcular como producto de probabilidades con temporalidades inferiores.

2. Por definición, ${}_nq_x = \frac{l(x)\ -\ l(x+n)}{l(x)}$, entonces

$$
\begin{aligned}
{}_nq_x &= \frac{l(x) - l(x+1) + l(x+1) \ldots - l(x+n-1) + l(x+n-1) - l(x+n)}{l(x)} \\
&= \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)} + \frac{l(x+1) - l(x+2)}{l(x)} + \ldots + \frac{l(x+n-1) - l(x+n)}{l(x)} \\
&= q_x + {}_{1/}q_x + \ldots + {}_{n-1/}q_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}q_x
\end{aligned}
$$

3.
$$
\begin{aligned}
{}_np_x &= \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l(x+n)}{l(x)}\frac{l(x+k)}{l(x+k)} = \frac{l(x+k)}{l(x)}\frac{l(x+n)}{l(x+k)} = {}_kp_x \cdot {}_{x+n-(x+k)}p_{x+k} \\
&= {}_kp_x \cdot {}_{n-k}p_{x+k}
\end{aligned}
$$

4. Por definición, ${}_{m/n}q_x = \frac{l(x+m)\ -\ l(x+m+n)}{l(x)}$, entonces

$$
\begin{aligned}
{}_{m/n}q_x &= \frac{l(x+m) - l(x+m+n)}{l(x)} = \frac{l(x+m)}{l(x)} - \frac{l(x+m+n)}{l(x)}\frac{l(x+m)}{l(x+m)} \\
&= \frac{l(x+m)}{l(x)}(1 - \frac{l(x+m+n)}{l(x+m)}) = {}_mp_x\,(1 - {}_np_{x+m}) = {}_mp_x \cdot {}_nq_{x+m}
\end{aligned}
$$

5.
$$
\begin{aligned}
{}_{m/n}q_x &= \frac{l(x+m) - l(x+m+n) + l(x) - l(x)}{l(x)} \\
&= \frac{l(x) - l(x+m+n)}{l(x)} - \frac{l(x) - l(x+m)}{l(x)} \\
&= {}_{m+n}q_x - {}_mq_x
\end{aligned}
$$

□

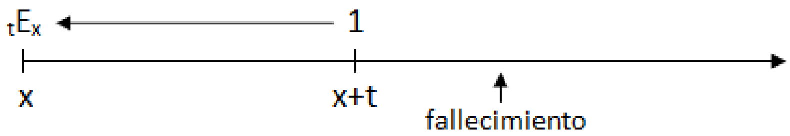
Observación 2.3.2. La propiedad de escindibilidad no se cumple en caso de fallecimiento, es decir,

$$
{}_nq_x \neq {}_kq_x \cdot {}_{n-k}q_{x+k}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}, k \leq n
$$

Efectivamente, si una persona de edad x fallece en k próximos años, ya no tendrá sentido hablar que pasará más adelante.

Ahora vamos a introducir dos funciones elementales de valoración actuarial que sirven para estudiar las operaciones básicas de seguros: *rentas de supervivencia* y *seguros de vida* (Vemos en el Tema 3).

Definición 2.3.2. *Sea ${}_t\tilde{E}_x$ una variable aleatoria asociada al valor actual de prestación de 1 u.m. pagadera al cabo de t años sobre una persona de edad actual x si continua viva a la edad $x+t$, llamamos* ***capital diferido(de t años)*** *o* ***prima pura*** *${}_tE_x$, la esperanza de dicha variable aleatoria.*



Recordamos que en cualquier operación de seguros de vida, tenemos que *actualizar* capitales futuros. Usamos interés compuesto, I_1 (tanto anual efectivo), entonces c_o, el valor actual de c_t u.m. se calcula como:

$$c_0 = c_t\ (1+I_1)^{-t}$$

También recordamos que para una variable aleatoria discreta X con valores posibles $x_1, x_2, \dots, x_n$ y sus probabilidades $p(x_i)$ la esperanza se calcula como:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$$

En nuestro caso, ${}_t\tilde{E}_x$ solo tiene dos valores posibles: $(1+I_1)^{-t}$ y 0.

	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{p(x_i)}$	$\mathbf{x_i \cdot p(x_i)}$
$i=1$	$(1+I_1)^{-t}$	${}_tp_x$	$(1+I_1)^{-t}\cdot\ {}_tp_x$
$i=2$	0	$1-\ {}_tp_x = {}_tq_x$	$0\cdot\ {}_tq_x = 0$

Por lo tanto,

$${}_tE_x = \mathbb{E}[{}_t\tilde{E}_x] = (1+I_1)^{-t}\cdot {}_tp_x \tag{2.2}$$

Para simplificar el valor actual de 1 u.m. en t años con interés I_1, usaremos v^t en lugar de $(1+I_1)^{-t}$, es decir,

$${}_tE_x = 1\cdot(1+I_1)^{-t}\cdot {}_tp_x = v^t\cdot {}_tp_x \tag{2.3}$$

Propiedad 2.3.2.

1. *${}_tE_x$ es decreciente en t.*

2. *${}_0E_x = 1$.*

3. *${}_{\omega-x}E_x = 0$.*

4. *${}_{t_1+t_2}E_x = {}_{t_1}E_x\cdot {}_{t_2}E_{x+t_1}$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{N}$. (Propiedad de escindibilidad)*

Demostración.

1. Como ${}_tE_x = v^t\cdot {}_tp_x$, y $v^t = (1+I_1)^{-t}$ y ${}_tp_x$ son decrecientes, ${}_tE_x$ tiene que ser decreciente.

2. ${}_0E_x = v^0 \cdot {}_0p_x = 1 \cdot 1 = 1$.

3. ${}_{\omega-x}E_x = v^{\omega-x} \cdot {}_{\omega-x}p_x = v^{\omega-x} \cdot \frac{l_{x+\omega-x}}{l_x} = v^{\omega-x} \cdot \frac{l_\omega}{l_x} = v^{\omega-x} \cdot \frac{0}{l_x} = 0$.

4. Sabemos que $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{N}$,

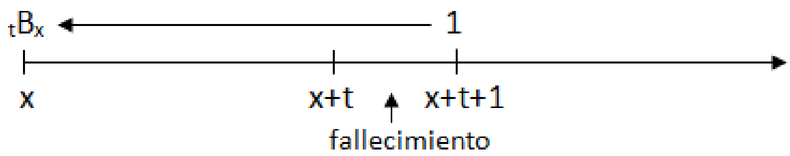
$$\begin{cases} v^{t_1+t_2} & = & v^{t_1} \cdot v^{t_2} \\ {}_{t_1+t_2}p_x & = & {}_{t_1}p_x \cdot \ {}_{t_2}p_{x+t_1} \end{cases}$$

donde la última igualdad es la propiedad de escindibilidad para probabilidades temporales.

${}_{t_1+t_2}E_x = v^{t_1+t_2} \cdot {}_{t_1+t_2}p_x = v^{t_1} \cdot v^{t_2} \cdot \ {}_{t_1}p_x \ \cdot \ {}_{t_2}p_{x+t_1} = (v^{t_1} \cdot \ {}_{t_1}p_x) \cdot (v^{t_2} \cdot \ {}_{t_2}p_{x+t_1})$
$= {}_{t_1}E_x \cdot {}_{t_2}E_{x+t_1}$

□

Definición 2.3.3. *Sea ${}_t\tilde{B}_x$ una variable aleatoria asociada al valor actual de prestación de 1 u.m. pagadera al cabo de $t+1$ años sobre una persona de edad actual x si fallece entre $x+t$ y $x+t+1$, llamamos **capital al final de año de fallecimiento** o **capital al fallecimiento** ${}_tB_x$, la esperanza de dicha variable aleatoria.*



Nos fijamos que ahora el valor actualizado ya no es $(1+I_1)^{-t}$, sinó $(1+I_1)^{-(t+1)}$. Además, para ${}_t\tilde{B}_x$ su correspondiente probablidad es la diferida de fallecimiento, ${}_{t/}q_x$.

	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{p(x_i)}$	$\mathbf{x_i \cdot p(x_i)}$
$i=1$	$(1+I_1)^{-(t+1)}$	${}_{t/}q_x$	$(1+I_1)^{-(t+1)} \cdot \ {}_{t/}q_x$
$i=2$	0	$1- \ {}_{t/}q_x$	$0 \cdot (1- \ {}_{t/}q_x) = 0$

Por lo tanto,

$$ {}_tB_x = \mathbb{E}[{}_t\tilde{B}_x] = (1+I_1)^{-(t+1)} \cdot \ {}_{t/}q_x \tag{2.4}$$

Para simplificar

$$ {}_tB_x = (1+I_1)^{-(t+1)} \cdot \ {}_{t/}q_x = v^{t+1} \cdot \ {}_{t/}q_x \tag{2.5}$$

Propiedad 2.3.3.

1. ${}_tB_x = v \cdot {}_tE_x - \ {}_{t+1}E_x, \ \forall t \in \mathbb{N}$.

2. ${}_{t_1+t_2}B_x = \ {}_{t_1}E_x \cdot {}_{t_2}B_{x+t_1}, \ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{N}$.

Demostración.

1.
$$
{}_{t/}q_x = \frac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l(x)} = \frac{l(x+t)}{l(x)}\frac{l(x+t) - l(x+t+1)}{l(x+t)} = {}_tp_x \cdot q_{x+t}
$$
$$
= {}_tp_x \cdot (1 - p_{x+t}) = {}_tp_x - {}_tp_x \cdot p_{x+t} = {}_tp_x - {}_{t+1}p_x
$$

$$
\Rightarrow {}_tB_x = v^{t+1} \cdot {}_{t/}q_x = v^{t+1} \cdot ({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) = v \cdot E_x - {}_{t+1}E_x
$$

2. De la misma manera tenemos ${}_{t_1+t_2/}q_x = {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2/}q_{x+t_1}$
$\Rightarrow {}_{t_1+t_2}B_x = v^{t_1+t_2+1} \cdot {}_{t_1+t_2/}q_x = v^{t_1+t_2+1} \cdot {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2/}q_{x+t_1}$
$= (v^{t_1} \cdot {}_{t_1}p_x) \cdot (v^{t_2+1} \cdot {}_{t_2/}q_{x+t_1}) = {}_{t_1}E_x \cdot {}_{t_2}B_{x+t_1}$

□

3. Operaciones actuariales básicas

Despúes de estudiar las funciones elementales, ya podemos introducir operaciones actuariales relacionadas con la supervivencia o fallecimiento, sin tener en cuenta la contingencia adicional de invalidación, es decir, *Rentas de supervivencia* y *Seguros de vida*.

3.1. Rentas de supervivencia discretas

Definición 3.1.1. *Definimos* ***rentas de supervivencia*** *como el pago (conjunto de capitales) al asegurado de edad x mientras viva.*

Clasificación 3.1.1.

1. Según número de capitales por año:
   - Rentas anuales (1 capital por año si vive);
   - Rentas fraccionadas (k capitales por año si vive).

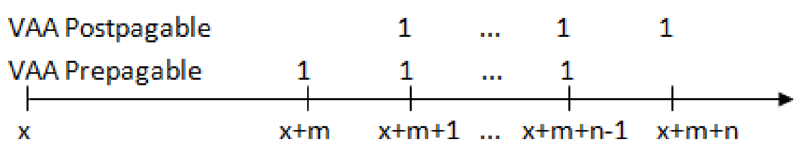
2. Según cuantías de rentas:
   - Rentas constantes;
   - Rentas variables.

3. Según momento de pago:
   - Rentas prepagable o anticipada (si el pago realiza al inicio de cada período);
   - Rentas postpagable o vencida (si el pago realiza al final de cada período).

En general, las rentas (o seguros) son:
- Diferidas m años;
- Temporales n años.

Si $m = 0$, entonces le llamamos **rentas inmediatas**;
Si $x+m+n = \omega$ (o $n = \omega - (x+m)$), entonces le llamamos **rentas vitalicias**.

Consideramos una renta de supervivencia anual y constante, diferida (m años) y temporal (n años), además supongamos que el pago de cada capital es 1 u.m.. Queremos hacer *valoración financiera* de esta renta, es decir, calcular su valor actual (VAA) a partir del capital diferido ${}_tE_x$ que hemos definido anteriormente:



VAA prepagable: ${}_{m/n}\ddot{a}_x = \sum\limits_{t=m}^{m+n-1} {}_tE_x = \sum\limits_{t=m}^{m+n-1} v^t \cdot {}_tp_x$

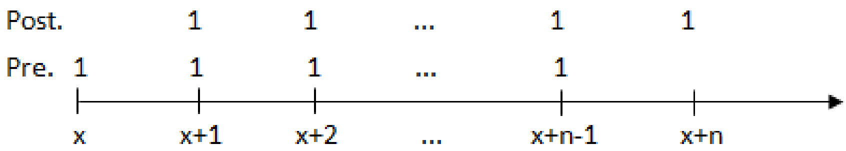
VAA postpagable: ${}_{m/n}a_x = \sum\limits_{t=m+1}^{m+n} {}_tE_x = \sum\limits_{t=m}^{m+n-1} {}_{t+1}E_x = \sum\limits_{t=m}^{m+n-1} v^{t+1} \cdot {}_{t+1}p_x$

<u>Relación entre VAA prepagable y VAA postpagable:</u>

${}_{m/n}\ddot{a}_x = {}_{m/n}a_x + {}_mE_x - {}_{m+n}E_x$

Ejemplo 3.1. Ahora concentramos las rentas de supervivencia anuales y constantes, vamos a ver unos casos particulares en función de diferimiento y de temporalidad:

1. Inmediata y temporal $(m = 0)$ [5] :

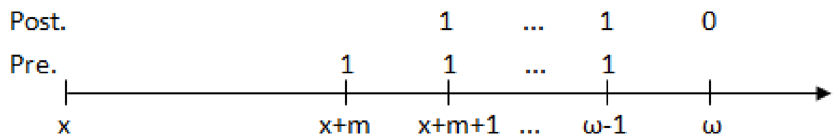


VAA prepagable: ${}_{/n}\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x$

VAA postpagable: ${}_{/n}a_x = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t+1}E_x$

Relación: ${}_{/n}\ddot{a}_x = {}_{/n}a_x + {}_0E_x - {}_nE_x = {}_{/n}a_x + 1 - {}_nE_x$

2. Diferida y vitalicia $(x + m + n = \omega)$ [6]:



VAA prepagable: ${}_{m/}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-1} {}_tE_x$

VAA postpagable: ${}_{m/n}a_x = \sum_{t=m+1}^{\omega-x} {}_tE_x = \sum_{t=m}^{\omega-x-1} {}_{t+1}E_x = \sum_{t=m}^{\omega-x} {}_{t+1}E_x$ ya que ${}_{\omega-x}E_x = 0$

Relación: ${}_{m/}\ddot{a}_x = {}_{m/}a_x + {}_mE_x$

3. Inmediata y vitalicia $(m = 0$ y $x + n = \omega)$ [7]:

VAA prepagable: $\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} {}_tE_x$

VAA postpagable: $a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t+1}E_x$

Relación: $\ddot{a}_x = a_x + 1$

[5] Notación: si m=0, escribimos ${}_{/n}\ddot{a}_x$ $({}_{/n}a_x)$ en lugar de ${}_{0/n}\ddot{a}_x$ $({}_{0/n}a_x)$.

[6] Notación: si $x+m+n = \omega$, escribimos ${}_{m/}\ddot{a}_x$ $({}_{m/}a_x)$ en lugar de ${}_{m/\omega-(x+m)}\ddot{a}_x$ $({}_{m/\omega-(x+m)}a_x)$.

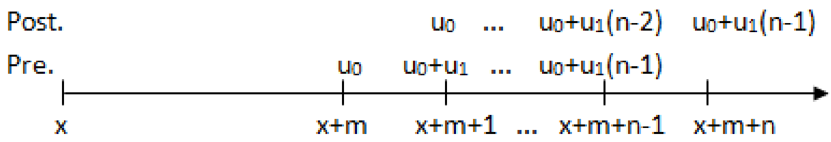
[7] Notación: si $m = 0$ y $x + m + n = \omega$, escribimos $\ddot{a}_x$ (a_x) en lugar de ${}_{/}\ddot{a}_x$ $({}_{/}a_x)$.

3.2. Rentas de supervivencia variables

Ya hemos visto las rentas constantes y unos ejemplos sencillos, ahora introducimos las rentas variables que se dividen en **rentas variables lineales** y **rentas variables geométricas**.

1. Valoración financiera de rentas lineales [8]

   Características:
   u_0: cuantía de primer término;
   u_1: cuantía fija de crecimiento (o decrecimiento) en cada término.

   Por lo tanto, la cuantía de cada término es:

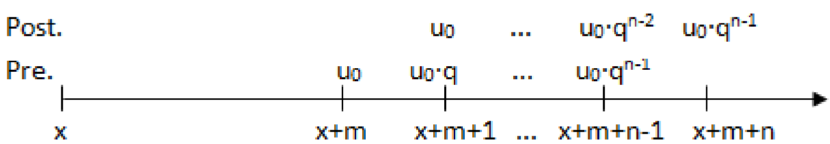
   $$u_0 + u_1(t-m), \quad \forall t = m, \cdots, m+n-1. \quad (prepagable)$$
   $$\forall t = m+1, \cdots, m+n. \quad (postpagable)$$

   VAA prepagable: ${}_{m/n}\underset{\left[\substack{u_o\\u_1}\right]}{V\ddot{a}_x} = \sum_{t=m}^{m+n-1} (u_0 + u_1(t-m)) \cdot {}_tE_x$

   VAA postpagable: ${}_{m/n}\underset{\left[\substack{u_o\\u_1}\right]}{Va_x} = \sum_{t=m}^{m+n-1} (u_0 + u_1(t-m)) \cdot {}_{t+1}E_x$

2. Valoración financiera de rentas geométricas [9]

   Características:
   u_0: cuantía de primer término;
   q: porcentaje fija de crecimiento (o decrecimiento) en cada término.

   Por lo tanto, la cuantía de cada término es:

   $$u_0 \cdot q^{t-m}, \quad \forall t = m, \cdots, m+n-1. \quad (prepagable)$$
   $$\forall t = m+1, \cdots, m+n. \quad (postpagable)$$

[8] Notación: escribimos ${}_{m/n}\underset{\left[\substack{u_o\\u_1}\right]}{Va_x}$ (${}_{m/n}\underset{\left[\substack{u_o\\u_1}\right]}{Va_x}$) para indicar las rentas variables lineales con características u_0 y u_1.

[9] Notación: escribimos ${}_{m/n}\underset{\left[\substack{u_o\\q}\right]}{Va_x}$ (${}_{m/n}\underset{\left[\substack{u_o\\q}\right]}{Va_x}$) para indicar las rentas variables geométricas con características u_0 y q.

VAA prepagable: ${}_{m/n}V\ddot{a}_{x}{}_{\left[{u_o \atop q}\right]} = \sum_{t=m}^{m+n-1} (u_0 \cdot q^{t-m}) \cdot {}_tE_x$

VAA postpagable: ${}_{m/n}Va_{x}{}_{\left[{u_o \atop q}\right]} = \sum_{t=m+1}^{m+n} (u_0 \cdot q^{t-m}) \cdot {}_tE_x = \sum_{t=m}^{m+n-1} (u_0 \cdot q^{t-m}) \cdot {}_{t+1}E_x$

3.3. Seguros de vida

Definición 3.3.1. *Llamamos* ***seguro de vida*** *el pago de capital único constante (o variable) por la muerte del asegurado. No obstante, actualmente también se indica el seguro general que cubre el riesgo de muerte, supervivencia e incapacidad.*

Clasificación 3.3.1.

1. Según cuantías de capital:
   - Seguros constantes;
   - Seguros variables.

2. Según momento de pago:
   - Seguros anuales (se pagan al final del año de la muerte del asegurado);
   - Seguros continuos (se pagan al instante de la muerte del asegurado).

Igual a las rentas, los seguros son:
- Diferidos m años;
- Temporales n años.

Si $m = 0$, entonces le llamamos **seguros inmediatos**;
Si $x+m+n = \omega$ (o $n = \omega-(x+m)$), entonces le llamamos **seguros vitalicios**.

Observación 3.3.1. *T.A.R. (Temporal anual renovable)* también llamado *Temporal a prima natural*, es el seguro más habitual, que más se contrata y que tienen desarrollado más compañías. Es un seguro inmediato ($m = 0$) cuya duración inicial es de un año ($n = 1$), pudiéndose renovar en cada vencimiento, salvo que una de las partes informe expresamente de decisión de no renovar.

Además, en el TAR, al pagar cada año exacta y exclusivamente la prima necesaria para garantizar el capital asegurado, al finalizar el año el seguro queda totalmente equilibrado y si queremos modificar el capital asegurado, la prima de readaptará exactamente de acuerdo con el mismo, lo que le convierte en el seguro más elástico y que mejor se adapta a posibles cambios futuros.

Ahora vamos a ver los seguros anuales constantes y variables. Recordamos que en los seguros anuales no hay prepagables ni postpagables porque el pago siempre se realiza al final de año.

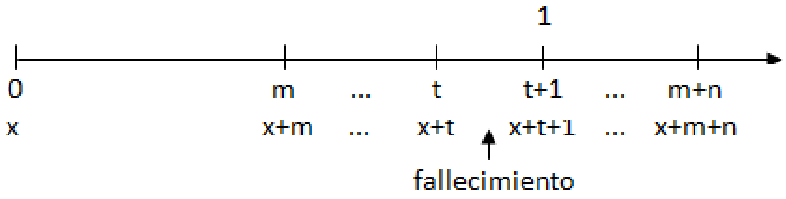
1. Seguros anuales constantes (unitario) [10]

   Recordamos el capital al fallecimiento

$$ {}_tB_x = (1 + I_1)^{-(t+1)} \cdot {}_{t/}q_x = v^{t+1} \cdot {}_{t/}q_x $$

[10] Notación: escribimos ${}_{m/n}A_x$ para indicar los seguros constantes.

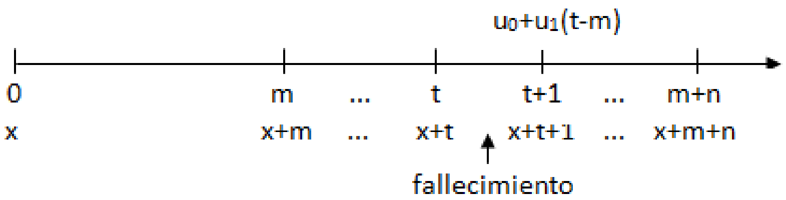
VAA: ${}_{m/n}A_x = \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_tB_x = \sum_{t=m}^{m+n-1} v^{t+1} \cdot {}_{t/}q_x$



2. Seguros anuales variables (lineales y geométricos) [11]

   a) Lineal

   Características:
   u_0: cuantía de primer término;
   u_1: cuantía fija de crecimiento (o decrecimiento) en cada término.



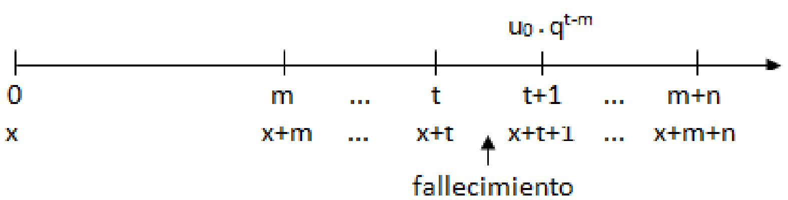
   Por lo tanto, la cuantía de cada término es:

$$u_0 + u_1(t-m), \quad \forall t = m, \cdots, m+n-1.$$

   VAA: ${}_{m/n}\underset{\left[\substack{u_o\\u_1}\right]}{VA_x} = \sum_{t=m}^{m+n-1} (u_0 + u_1(t-m)) \cdot {}_tB_x$

   b) Geométrico

   Características:
   u_0: cuantía de primer término;
   q: porcentaje fija de crecimiento (o decrecimiento) en cada término.



   Por lo tanto, la cuantía de cada término es:

$$u_0 \cdot q^{t-m}, \quad \forall t = m, \cdots, m+n-1.$$

[11]Notación: escribimos ${}_{m/n}\underset{\left[\substack{u_o\\u_1}\right]}{VA_x}$ y ${}_{m/n}\underset{\left[\substack{u_o\\q}\right]}{VA_x}$ para indicar los seguros variables lineales y geométricos con características (u_0, u_1) y (u_0, q), respectivamente.

VAA: $_{m/n}\underset{\left[\substack{u_o\\ q}\right]}{VA_x} = \sum_{t=m}^{m+n-1} (u_0 \cdot q^{t-m}) \cdot {}_tB_x$

Ya hemos acabado el tema de la valoración de operaciones actuariales, pero solo relacionadas con la supervivencia o el fallecimiento de una persona. Para añadir la contingencia adicional de invalidación, es necesario estudiar el concepto de Cadena de Markov, que es el siguiente tema.

4. Cadenas de Markov

4.1. Definiciones básicas

Un **proceso de Markov** es un *proceso estocástico* con la propiedad de que dado el valor actual del proceso X_t, los valores futuros X_s para $s > t$ son independientes de los valores pasados X_u para $u < t$. Es decir, que si tenemos la información presente del proceso, saber como llegó al estado actual no afecta las probabilidades de pasar a otro estado en el futuro. En el caso discreto la definición formal es la siguiente:

Definición 4.1.1. *Una* ***Cadena de Markov*** *a tiempo discreto es una sucesión de variables aleatorias $X_n, n > 1$, que toman valores en un conjunto finito o numerable $\mathcal{E}$, conocido como espacio de estados, y que satisface la siguiente propiedad*

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n) \quad (4.1)$$

para todo $n \geq 0$ y para todo estado $i_0, i_1, \ldots, i_n, j$ de $\mathcal{E}$. La propiedad (4.1) se conoce como la ***propiedad de Markov****.*

Diremos que X_n está en el estado i si $X_n = i$,

Definición 4.1.2. *Llamamos la* ***probabilidad de transición*** *en un paso de i a j P_{ij}^{nn+1} la probabilidad de que X_{n+1} esté en el estado j dado que X_n está en el estado i, o sea, es la probabilidad condicionada siguiente:*

$$P_{ij}^{nn+1} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (4.2)$$

En general, las probabilidades de transición dependen no solo de los estados sino también del instante en el cual se efectúa la transición. Cuando estas probabilidades son independientes del tiempo (o sea, de n) decimos que la cadena tiene probabilidades de transición **estacionarias u homogéneas** en el tiempo.

Notación 4.1. *En caso de la probabilidad de transición estacionaria, la escribimos como P_{ij} en lugar de P_{ij}^{nn+1} ya que no dependen de n y es la probabilidad de que la cadena pase del estado i al estado j en un paso.*

A continuación solo consideramos cadenas con probabilidades de transición estacionarias.

Si colocamos las probabilidades de transición en una matriz, entonces obtenemos

$$P = [P_{ij}] = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

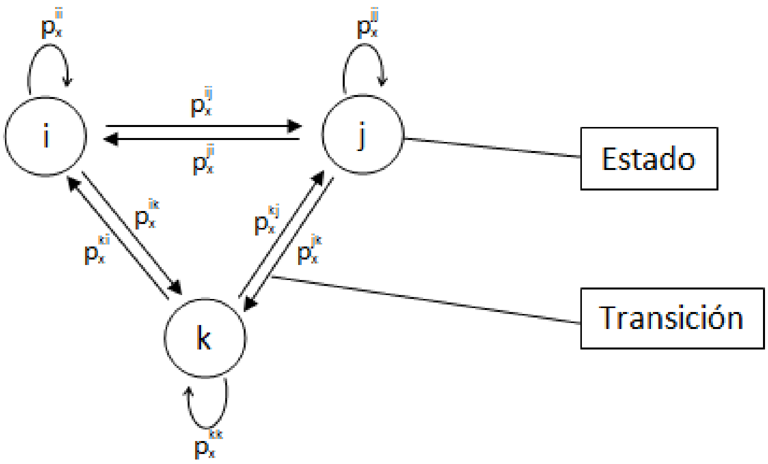
P se conoce como la **matriz de transición** (o la **matriz de probabilidades de transición**) de la cadena, que será finita o infinita según el tamaño de $\mathcal{E}$. La i-ésima fila de P para $i = 0, 1, \ldots$ es la distribución condicional de X_{n+1} dado que $X_n = i$. Si $\mathcal{E}$ es finito y supongamos que el número de estados es k, entonces P es una matriz cuadrada cuya dimensión es $k \times k$. Es inmediato que

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \geq 0, \quad \text{para } i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n+1} = j | X_n = i) = 1, \quad \text{para } i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

de modo que cada fila de la matriz representa una distribucón de probabilidad. Una matriz con esta propiedad se llama **matriz estocástica** o **de Markov**.

Una *representación gráfica* (o *diagrama*) de una matriz de transición es el arreglo númerico donde se condensa las probabilidades de un estado a otro, por ejemplo, supongamos que tenemos una matriz de transición 3×3 con $\mathcal{E} = \{i, j, k\}$, su diagrama es el siguiente:



Proposición 4.1.1. *Si las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices estocásticas, entonces $C = A \cdot B$ es también estocástica.*

Demostración. Por la regla de multiplicación de matrices, tenemos

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}]$$

De este modo,

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \sum_{j=1}^{m} b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot 1 = 1.$$

□

Una consecuencia de esta proposición es que cualquier potencia de la matriz estocástica P, o sea, P^n, $n \geq 1$, es estocástica.

Proposición 4.1.2. *Una cadena de Markov está completamente determinada si se especifican su matriz de transición y la distribución de probabilidad del estado inicial* X_0 [12].

Demostración. Sea $P(X_0 = x_i) = \pi(x_i)$, $i \geq 1$, la distribución de probabilidad del estado inicial X_0. Es suficiente mostrar como se calculan las probabilidades

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \tag{4.3}$$

ya que cualquier probabilidad que involucre a $X_{j_1}, \ldots, X_{j_k}$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ se puede obtener usando la Ley de la Probabilidad Total y sumando términos como (4.3). Tenemos

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) &= P(X_n = x_n | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &\cdot P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) \end{aligned}$$

por la propiedad de Markov, tenemos

$$\begin{aligned} P(X_n = x_n | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) &= P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= P_{x_{n-1}x_n} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} &P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\ &= P_{x_{n-1}x_n} \cdot P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= P_{x_{n-1}x_n} \cdot P_{x_{n-2}x_{n-1}} \cdot P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &= P_{x_{n-1}x_n} \cdot P_{x_{n-2}x_{n-1}} \cdots P_{x_0x_1} \cdot \pi(x_0) \end{aligned} \tag{4.4}$$

□

Análogamente muestra que la propiedad de Markov es equivalente a

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = y_1, \ldots, X_{n+m} = y_m | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) \\ &\quad = P(X_{n+1} = y_1, \ldots, X_{n+m} = y_m | X_n = x_n) \end{aligned}$$

Notación 4.2. *Como consecuencia de la proposión anterior, dado* $\{X_n\}$ *una sucesión de variables aleatorias, escribimos* (π, P) *para expresar la cadena de Markov, donde* π *es la distribución de probabilidad del estado inicial* X_0 *y* P *es la matriz de Markov.*

4.2. Propiedad de Markov

Ahora vamos a ver algunas consecuencias de la propiedad de Markov (4.1), principalmente son proposiciones que recopilamos de un material didáctico [7]. Primero buscamos una equivalencia de la propiedad que es la siguiente proposición:

[12] Notación: escribimos $\pi(x_i)$ la distribución de probabilidad del estado inicial X_0, es decir, $\pi(x_i) = P(X_0 = x_i)$, $\forall i \geq 1$.

Proposición 4.2.1. *La propiedad de Markov es equivalente a la siguiente condición: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $i \in \mathcal{E}$, condicionalmente a $X_n = x$, la distribución de X_{n+1} es P_{ij} $(j \in \mathcal{E})$ y es independiente de $X_0, \ldots, X_{n-1}$.*

Demostración. Para probar que la propiedad de Markov implica esta propiedad basta demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$ y $x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}$

$$\begin{aligned} &P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \\ &\quad = P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n) P_{x_n x_{n+1}} \end{aligned} \tag{4.5}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} &P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \\ &= \frac{P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n)}{P(X_n) = x_n} \\ &= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) \\ &\quad \times \frac{P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\ &= P_{x_n x_{n+1}} P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n) \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la propiedad de Markov y de la homogeneidad de la cadena. Ahora falta ver que la afirmación en la proposición implica la propiedad de Markov. Basta demostrar la siguiente igualdad

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) = P_{x_n x_{n+1}}$$

Es decir, la probabilidad anterior no depende de $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Efectivamente,

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) \\ &= \frac{P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1})}{P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)} \\ &= \frac{P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n)} \\ &= \frac{P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n) P_{x_n x_{n+1}}}{P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n)} \\ &= P_{x_n x_{n+1}} \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado destaca la idea de que el comportamiento pasado no tiene ninguna influencia en el futuro de una cadena de Markov.

Proposición 4.2.2. *Sean X_n una cadena de Markov (π, P) con espacio de estados $\mathcal{E}$. Sean $x, y, z \in \mathcal{E}$ y $0 \leq m \leq n-1, n, m \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$P(X_{n+1} = y | X_n = x, X_m = z) = P(X_{n+1} = y | X_n = x) = P_{xy}$$

Demostración. Sabemos que el conjunto Ω se puede escribir como la unión disjunta de los siguientes conjuntos:

$$\Omega = \bigcup_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{E}} \{X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$$

y en particular $\Omega = \{X_i \in \mathcal{E}\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = y|X_n = x, X_m = z)\\
&= \frac{P(X_{n+1} = y, X_n = x, X_{n-1} \in \mathcal{E}, \ldots, X_{m+1} \in \mathcal{E}, X_m = z)}{P(X_n = x, X_m = z)}\\
&= \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{E}} \frac{P(X_{n+1} = y, X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_{m+1} = x_{m+1}, X_m = z)}{P(X_n = x, X_m = z)}\\
&= \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{E}} P(X_{n+1} = y|X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_{m+1} = x_{m+1}, X_m = z)\\
&\qquad\qquad \times \frac{P(X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_{m+1} = x_{m+1}, X_m = z)}{P(X_n = x, X_m = z)}\\
&= \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{E}} P(X_{n+1} = y|X_n = x)\\
&\qquad\qquad \times \frac{P(X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_{m+1} = x_{m+1}, X_m = z)}{P(X_n = x, X_m = z)}\\
&= P(X_{n+1} = y|X_n = x)\\
&\quad \times \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{E}} \frac{P(X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_{m+1} = x_{m+1}, X_m = z)}{P(X_n = x, X_m = z)}\\
&= P(X_{n+1} = y|X_n = x)\ \frac{P(X_n = x, X_{n-1} \in \mathcal{E}, \ldots, X_{m+1} \in \mathcal{E}, X_m = z)}{P(X_n = x, X_m = z)}\\
&= P(X_{n+1} = y|X_n = x)\ \frac{P(X_n = x, X_m = z)}{P(X_n = x, X_m = z)}\\
&= P(X_{n+1} = y|X_n = x) = P_{xy}
\end{aligned}$$

usando el hecho de que la probabilidad de la unión numerable de conjuntos disjuntos es igual a la suma de las probabilidades de dichos conjuntos y la propiedad de Markov. □

La siguiente proposición demuestra que al condicionar con respecto a cualquier evento del pasado la propiedad de Markov sigue siendo válida.

Proposición 4.2.3. *Sean $x, y \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$ y $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1} \subseteq \mathbb{N}$. Se cumple que*

$$P(X_{n+1} = y|X_n = x, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0) = P(X_{n+1} = y|X_n = x)$$

Demostración. La prueba es análoga a la demostración anterior.
Otra forma de ver este resultado es utilizar la forma equivalente de la propiedad de

Markov como la Proposición 4.2.1

$$
\begin{aligned}
& P(X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0) \\
= & \frac{P(X_{n+1} = y, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0 | X_n = x)}{P(X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0 | X_n = x)} \\
= & P(X_{n+1} = y | X_n = x)
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad es consecuencia de la ecuación (4.5). □

Finalmente, el siguiente resultado, que la ley de la cadena observada a partir del momento m es la misma que la observada al tiempo $n = 0$, refuerza la idea de que una cadena es homogénea en el tiempo.

Proposición 4.2.4. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_{m+n} \in \mathcal{E}$, se cumple que*

$$
\begin{aligned}
& P(X_{m+1} = x_{m+1}, \ldots, X_{m+n} = x_{m+n} | X_m = x_m, \ldots, X_0 = x_0) \\
= & P(X_1 = x_{m+1}, \ldots, X_n = x_{m+n} | X_0 = x_m)
\end{aligned}
$$

Demostración. La prueba se basa en seguir usando la ecuación (4.4):

$$
\begin{aligned}
& P(X_{m+1} = x_{m+1}, \ldots, X_{m+n} = x_{m+n} | X_m = x_m, \ldots, X_0 = x_0) \\
= & \frac{P(X_{m+1} = x_{m+1}, \ldots, X_{m+n} = x_{m+n}, X_m = x_m, \ldots, X_0 = x_0)}{P(X_m = x_m, \ldots, X_0 = x_0)} \\
= & \frac{\pi(x_0) P_{x_0 x_1} \cdots P_{x_{m-1} x_m} \cdots P_{x_{m+n-1} x_{m+n}}}{\pi(x_0) P_{x_0 x_1} \cdots P_{x_{m-1} x_m}} \\
= & P_{x_m x_{m+1}} \cdots P_{x_{m+n-1} x_{m+n}} \\
= & P(X_1 = x_{m+1}, \ldots, X_n = x_{m+n} | X_0 = x_m)
\end{aligned}
$$

□

4.3. Matrices de transición

Cuando hablamos de cadena de Markov es imprescindible estudiar las matrices de transición en n pasos: $P^{(n)} = (P_{ij}^{(n)})$, donde $P_{ij}^{(n)}$ denota la probabilidad de que el proceso pase del estado i al estado j en n pasos:

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j | X_m = i)$$

para todo m. Recordamos que estamos trabajando con procesos cuyas matrices de transición son estacionarias.

Teorema 4.3. (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov)
Si $P = (P_{ij})$ es la matriz de transición de una cadena de Markov, y definimos

$$P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & si \quad i = j, \\ 0, & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

entonces

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_k P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(s)} \tag{4.6}$$

para cualquier par fijo de entero no-negativos r y s que satisfacen $r + s = n$.

Demostración. Hacemos una partición según los valores posibles de la cadena en el instante r:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_k P(X_n = j, X_r = k | X_0 = i) \\
&= \sum_k \frac{P(X_n = j, X_r = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \sum_k \frac{P(X_n = j, X_r = k, X_0 = i)}{P(X_r = k, X_0 = i)} \frac{P(X_r = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \sum_k P(X_n = j | X_r = k, X_0 = i) P(X_r = k | X_0 = i) \\
&= \sum_k P(X_n = j | X_r = k) P(X_r = k | X_0 = i) \\
&= \sum_k P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(s)}
\end{aligned}$$

□

Si la probabilidad de que el proceso esté inicialmente en j es $\pi(j)$:

$$P(X_0 = j) = \pi(j)$$

entonces la probabilidad de que el proceso esté en el estado k en el instante n es

$$P(X_n = k) = P_k^{(n)} = \sum_j \pi(j) P_{jk}^{(n)}$$

Notación 4.4. *Observamos que la relación (4.6) representa la multiplicación de las matrices $P^{(r)}$ y $P^{(s)}$, de modo que $P^{(n)}$ es simplemente la n-ésima potencia de P. Así que eliminamos los paréntesis en la notación del exponente.*

Vamos a poner un ejemplo sencillo para sacar una idea de cómo aplicar las matrices de transición a los seguros, en el siguiente tema concretamos los detalles.

Ejemplo 4.5. En un modelo actuarial con supervivencia y fallecimiento (sin contingencia de invalidación) solo hay dos estados: v (vivo), f (fallecido), es decir,

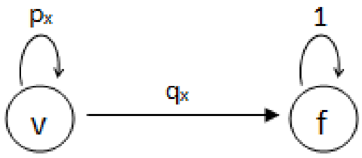
$$\mathcal{E} = \{v, f\}$$

Entonces tenemos las siguientes probabilidades de transición: p_{vv}, p_{vf}, p_{fv}, p_{ff}. Por la uniformidad de notación de los seguros: $p_x = p_{vv}$, $q_x = p_{vf}$, $p_{fv} = 0$, $p_{ff} = 1$.

Por lo tanto, la matriz de transición será

$$P = (P_{ij}) = \begin{pmatrix} p_x & q_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y el diagrama es muy simple



La matriz en n pasos P^n es la n-ésima potencia de P con las probabilidades temporales n años (${}_np_x = p_{vv}^{(n)}$, $q_x = p_{vf}^{(n)}$),

$$P^n = (P_{ij}^{(n)}) = \begin{pmatrix} {}_np_x & {}_nq_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por el *teorema de Chapman-Kolmogorov* (Teorema 4.3):

$$\begin{pmatrix} {}_np_x & {}_nq_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_kp_x & {}_kq_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_{n-k}p_{x+k} & {}_{n-k}q_{x+k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a hacer una pequeña comprobación:

${}_kp_x \cdot {}_{n-k}p_{x+k} = {}_np_x$ (Propiedad de escindibilidad);

$${}_kp_x \cdot {}_{n-k}q_{x+k} + {}_kq_x = {}_{k/n-k}q_x + {}_kq_x = \frac{l(x+k) - l(x+k+n-k)}{l(x)} + \frac{l(x) - l(x+k)}{l(x)}$$

$$= \frac{l(x+k) - l(x+n) + l(x) - l(x+k)}{l(x)} = \frac{l(x) - l(x+n)}{l(x)} = {}_nq_x$$

Hemos demostrado que

$$P^n = ({}_np_x^{ij}) = ({}_kp_x^{ij}) \cdot ({}_{n-k}p_{x+k}^{ij})$$

Hay más conceptos relacionados con Cadena de Markov que se estudian con más profundidad en [7] y [8]. No vamos a introducir más ya que no las utilizamos para analizar nuestros modelos actuariales, que es el siguiente tema.

5. Valoración actuarial de prestaciones relacionadas con la invalidez

Ahora llegamos a la última parte de este trabajo, *valoración actuarial de prestaciones relacionadas con la invalidez*. Para estudiarla, necesitamos conocimientos básicos de seguros de vida, como las *probabilidades actuariales* (Tema 2) utilizando herramientas matemáticas como *Cadenas de Markov* (Tema 4).

Primero introducimos el modelo básico con 3 hipótesis, las probabilidades relacionadas con la invalidez, la matriz de transición y su generalización, etc. Luego veremos un nuevo modelo en que se modifican la 1^a y la 3^a hipótesis.

5.1. Hipótesis del modelo básico

Trataremos en primer lugar, el modelo que surge de aquel en el que la única causa de salida del colectivo era el fallecimiento, introduciendo una contingencia adicional, con características análogicas a las del fallecimiento en lo referente a la temporalidad, consistente en la invalidación. Estas características quedan recogidas en las siguientes hipótesis, en las que se basa este modelo.

1. No se considera la posibilidad de retorno a la actividad.
2. Se considera que para cualquier edad, bajo la contingencia de invalidez, todo supervivente es activo o inválido.
3. Se considera que la contingencia de invalidación puede darse en un activo de cualquier edad.

Definición 5.1.1. *Dada una función de cohorte l_x, $x \in \mathbb{N}$, definimos l_x^{aa} y l_x^{ii} como el número de personas de edad x activas e inválidas, respectivamente.*

Observación 5.1.1. Según la hipótesis 2 de este modelo, todo superviviente es activo o inválido, tenemos

$$l_x = l_x^{aa} + l_x^{ii} \tag{5.1}$$

Pero esta relación no tiene por qué cumplirse en otro modelo cuando se modifica la hipótesis 2. Por ejemplo, en práctica muchos actuarios consideran más de tres tipos de estados, pueden ser inválido 1, inválido 2, etc. por lo cual se cambian las condiciones.

A partir de la función l_x^{aa} podemos definir la **función de distribución actuarial de los activos** $S^{aa}(x,n)$:

$$S^{aa}(x,n) = \frac{l_{x+n}^{aa}}{l_x^{aa}} = {}_np_x^{aa} \tag{5.2}$$

siendo ${}_np_x^{aa}$ la probabilidad de que un activo que hoy tiene la edad x continue vivo y activo en la edad $x+n$.

Definición 5.1.2. *Un colectivo abierto en el que puede haber entradas y salidas de personas simultáneamente se llama* ***efectivo****, en contrario a un* ***orden*** *(colectivo cerrado) si solo hay salidas. Es* ***simple*** *cuando solo existe una única causa de salida (fallecimiento) y es* ***compuesto*** *cuando existe más de una.*

Ejemplo 5.1.

1. l_x es un orden simple.
2. l_x^{aa} es un orden compuesto.
3. l_x^{ii} es un efectivo simple ya que recoje las entradas de los que se van invalidando, y las salidas por fallecimiento que es la única causa de salida por la Hipótesis 1, que no contemplamos la posibilidad de vuelta a la actividad de un inválido.

Observamos que la función l_x^{ii} no nos sirve para analizar la supervivencia o muerte de los inválidos ya que es un efectivo. Entonces vamos a buscar una serie que sí lo haga: l_x^i.

Su obtención se efectua de forma análoga a la utilizada para obtener l_x, ya que se trata también de un orden simple, cuya única causa de salida es el fallecimiento. A partir de las estimaciones de las tasas anuales de fallecimiento de inválidos a la edad x dadas por $q_x^i = p_x^{if}$ [13], se obtiene la siguiente recurrencia:

$$l_{x+1}^i = l_x^i \cdot (1 - q_x^i)$$

con la base $l_0^i = l_0^{ii}$. Si la aplicamos sucesivamente nos da:

$$l_{x+n}^i = l_x^i \cdot \prod_{x=0}^{n-1} (1 - q_{x+k}^i)$$

Ahora hemos de estimar las probabilidades actuariales que son las de la matriz de transición de un paso, es decir, para $n = 1$. Pero aún no hemos definido la cadena de Markov...

Y como aplicamos la cadena de Markov (a tiempo discreto) a los seguros de vida? Pues primero de todo definimos la cadena como X_t, $t \in \mathbb{N}$ (número de años) que indican "*estados de una persona (de edad x) en el año* $x + t$" y que toman valores en el espacio de estados (actuarial) como

$$\mathcal{E}_s = \{a, i, f\}$$

donde los estados: a es activo, i es inválido y f es fallecido. Obviamente se cumple la propiedad de Markov

$$P(X_{t+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_t = i_t) = P(X_{t+1} = j | X_t = i_t)$$

para todo $t \geq 0$ y para todo estado $i_0, i_1, \ldots, i_t, j$ de $\mathcal{E}$, ya que el estado actual de una persona depende solamente del inmediatamente anterior.

[13] Notación: escribimos q_x^a y q_x^i (p_x^i) en lugar de p_x^{af} y p_x^{if} (p_x^{ii}), respectivamente.

Entonces obtenemos la matriz de transición de seguro

$$P_s = \begin{pmatrix} P_{aa} & P_{ai} & P_{af} \\ P_{ia} & P_{ii} & P_{if} \\ P_{fa} & P_{fi} & P_{ff} \end{pmatrix}$$

Notación 5.2. *Por la uniformidad de la notación de los seguros con el libro de Antonio Alegre [1], escribimos p_x^{ij} en lugar de P_{ij} donde $i, j \in \mathcal{E}_s$ y x es la edad de la persona.*

Proposición 5.1.1.

1. *La matriz P_s es triangular superior.*

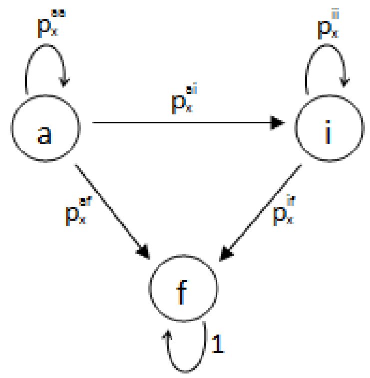
2. $p_x^{ff} = 1$.

Demostración. Tenemos que ver: $p_x^{ia} = p_x^{fa} = p_x^{fi} = 0$ y $p_x^{ff} = 1$. Efectivamente, por la hipótesis 1, no hay posibilidad de retorno a la actividad, implica que $p_x^{ia} = 0$. Una vez fallecido la persona, ya es permanente, de manera que $p_x^{fa} = p_x^{fi} = 0$ y $p_x^{ff} = 1$. □

Entonces nuestra matriz es

$$P_s = \begin{pmatrix} p_x^{aa} & p_x^{ai} & q_x^{a} \\ 0 & p_x^{i} & q_x^{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con su diagrama



5.2. Estimación de probabilidades

En esta sección vamos a estimar todas las probabilidades de transición de la matriz que hemos obtenido en la sección anterior. En el libro de Alegre [1] se cogen las tablas de mortalidad [2], *EVK 1960*, que tienen los siguientes datos:

1. l_x: el colectivo general de edad x;

2. p_x^i: la tasa anual de fallecimiento de inválidos de edad x;

3. i_x: la probabilidad de invalidación entres las edades x y $x+1$;

Además, por la matriz de Markov sabemos que

$$\begin{cases} p_x^{aa} & +p_x^{ai} & +q_x^a & =1 \\ & p_x^i & +q_x^i & =1 \end{cases}$$

Como ya tenemos p_x^i, $q_x^i = 1 - p_x^i$.

Nos falta estimar las probabilidades para los activos: p_x^{aa}, p_x^{ai} y q_x^a.

La siguiente observación que propongo yo es una desigualdad que he confundido al principio, dado que una igualdad "parece" muy lógica, pero en realidad no es cierto.

Observación 5.2.1.

$$q_x^a + q_x^i \neq q_x$$

Demostración. Supongamos que $q_x^a = \dfrac{y}{l_x^{aa}}$ y $q_x^i = \dfrac{z}{l_x^{ii}}$ donde y, z son los fallecidos que estaban activos y inválidos en el x, respectivamente. Claramente $y + z = l_x - l_{x+1}$.

Entonces

$$q_x^a + q_x^i = \frac{y}{l_x^{aa}} + \frac{z}{l_x^{ii}} \neq \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \; (= q_x)$$

porque $l_x^{aa} + l_x^{ii} = l_x$, con lo cual nunca puede ser una igualdad. Más en concreto, $q_x^a + q_x^i \geq q_x$. □

Por lo tanto, no podemos definir q_x^a con los datos que tenemos ya que $q_x^a \neq q_x^i - q_x$. Además, la que hemos supuesto $q_x^a = \dfrac{y}{l_x^{aa}}$ no se puede definir así! Porque de momento no conocemos l_x^{aa}!!! Si nos fijamos la probabilidad de invalidación (i_x), veremos que puede descomponerse en:

$$i_x = p_x^{ai} + q_x^{ai}$$

donde

p^{ai} es probabilidad de que una persona activa de edad x se invalide entre x y $x+1$, y llegue viva e inválida a la edad $x+1$;

q^{ai} es probabilidad de que una persona activa de edad x se invalide y muera inválida entre x y $x+1$.

Según Hamza [14] podemos suponer que q_x^{ai} como

$$q_x^{ai} \simeq i_x \cdot \frac{q_x^i}{2}$$

Es decir, la invalidación se produce de forma uniforme, es como todos se invalidaran a mitad de año y la muerte se actua por la mitad que queda.

[14] Hamza E. es un actuario ruso, el libro se basa en los supuestos utilizados por Hamza.

Pero q_x^{ai} no es la que nos interesa, sinó p_x^{ai}:

$$\begin{aligned} p_x^{ai} &= i_x - q_x^{ai} = i_x - i_x \cdot \frac{q_x^i}{2} = i_x \cdot (1 - \frac{q_x^i}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot i_x \cdot (1 + p_x^i) \end{aligned}$$

Solo falta determinar p_x^{aa} ya que $q_x^a = 1 - p_x^{aa} - p_x^{ai}$. De hecho, ya hemos definido la función de distribución actuarial de los activos (5.2):

$$p_x^{aa} = S^{aa}(x, 1) = \frac{l_{x+1}^{aa}}{l_x^{aa}}$$

Tenemos que buscar la serie l_x^{aa}. El siguiente cuadro [15] nos presenta cómo se construye esta serie con los datos que tenemos:

I					II			
x	$\mathbf{l_x}$	$\mathbf{p_x^i}$	$\mathbf{i_x}$	$\mathbf{p_x^{ai}}$	$\mathbf{l_x^{aa}}$	$\mathbf{l_x^{(ii)}}$	$\mathbf{l_x^{ai}}$	$\mathbf{l_x^{ii}}$
x_0	l_{x_0}	$p_{x_0}^i$	i_{x_0}	$p_{x_0}^{ai}$	$l_{x_0}^{aa} = l_{x_0}$	-	-	$l_{x_0}^{ii} = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	l_x	p_x^i	i_x	p_x^{ai}	l_x^{aa}	-	-	l_x^{ii}
$x+1$	l_{x+1}	p_{x+1}^i	i_{x+1}	p_{x+1}^{ai}	$4 = l_{x+1} - 3$	$1 = l_x^{ii} \cdot p_x^i$	$2 = l_x^{aa} \cdot p_x^{ai}$	$3 = 1 + 2$

Cuadro 4: Proceso de recurrencia para obtener colectivos activos

En la parte I se recogen los datos de partida necesarios, mientras que en la II se recoge el proceso de recurrencia para el cálculo de l_{x+1}^{aa} a partir de los datos del año x de la I:

1 - Se calcula $l_{x+1}^{(ii)}$ a partir de l_x^{ii}.

2 - Se calcula l_{x+1}^{ai} a partir de l_x^{aa}.

3 - Se calcula l_{x+1}^{ii} que es la suma de los dos anteriores.

4 - Se calcula l_{x+1}^{aa} como la diferencia de l_{x+1} y l_{x+1}^{ii}.

5.3. Generalización con la matriz de transición

En la sección anterior hemos construido la matriz de transición a partir de la estimacón de las probabilidades, $P_s = (p_x^{ij})$ para caso $n = 1$. Sin embargo, para hacer la valoración actuarial necesitamos estimar ${}_np_x^{ij}$, o sea, una generalización para cualquier n.

Recordamos que ${}_np_x^{ij}$ es la probabilidad de que una persona de edad x pase del estado i al estado j en n años, es justo $P_{ij}^{(n)}$!

$${}_np_x^{ij} = P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

[15] Fuente: página 17 del libro de Alegre [1].

De manera que podemos hacer la generalización a partir de las matrices de transición en n pasos: $P_s^n = (P_{ij}^{(n)}) = ({}_np_x^{ij})$.

Calculamos primero las matrices $n = 2$ y $n = 3$ explicando las probabilidades de transición, y luego vamos a deducir el caso general.

Por el *teorema de Chapman-Kolmogorov* (Teorema 4.3), cualquiera potencia de la matriz de transición P_s, se puede escribir como:

$$P_s^n = ({}_np_x^{ij}) = ({}_kp_x^{ij}) \cdot ({}_{n-k}p_{x+k}^{ij})$$

<u>$n = 2$</u>

$$P_s^2 = \begin{pmatrix} p_x^{aa} & p_x^{ai} & q_x^a \\ 0 & p_x^i & q_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{x+1}^{aa} & p_{x+1}^{ai} & q_{x+1}^a \\ 0 & p_{x+1}^i & q_{x+1}^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} & p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i & p_x^{aa} \cdot q_{x+1}^a + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i + q_x^a \\ 0 & p_x^i \cdot p_{x+1}^i & p_x^i \cdot q_{x+1}^i + q_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= ({}_2p_x^{ij}) = \begin{pmatrix} {}_2p_x^{aa} & {}_2p_x^{ai} & {}_2q_x^a \\ 0 & {}_2p_x^i & {}_2q_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente,

1) ${}_2p_x^{aa} = p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa}$

2) ${}_2p_x^{ai} = p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i$

3) ${}_2q_x^a = p_x^{aa} \cdot q_{x+1}^a + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i + q_x^a$

4) ${}_2p_x^i = p_x^i \cdot p_{x+1}^i$

5) ${}_2q_x^i = p_x^i \cdot q_{x+1}^i + q_x^i$

donde las igualdades 1) y 4) son triviales, simplemente es aplicar la propiedad de escindibilidad como para la función de supervivencia. Se cumple esta propiedad porque también cogen colectivos cerrados.

2) ${}_2p_x^{ai}$ es la probabilidad de que una persona activa de edad x se invalide entre x y $x+2$, y llegue viva e inválida a la edad $x+2$. Entonces solo existe dos posibles casos:

1. El primer año sigue activo y se invalida en el segundo.
2. El primer año se invalida y sigue vivo e inválido en el segundo.

$\Rightarrow \ {}_2p_x^{ai} = p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i$

3) ${}_2q_x^a$ es la probabilidad de que una persona de edad x que está activa ahora fallezca en próximos 2 años. Entonces existe tres posibilidades:

1. El primer año sigue activo y fallece en el segundo.
2. El primer año se invalida y fallece en el segundo.
3. Fallece en el primer año.

$\Rightarrow \;\; {}_2q_x^a = p_x^{aa} \cdot q_{x+1}^a + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i + q_x^a$

5) ${}_2q_x^i$ es la probabilidad de que una persona de edad x que está inválida ahora fallezca en próximos 2 años. En este caso, es similar al anterior. Pero por la hipótesis 1 , que no se puede volver a activarse, hay dos posibilidades:

1. El primer año sigue inválido y fallece en el segundo.

2. Fallece en el primer año.

$\Rightarrow \;\; {}_2q_x^i = p_x^i \cdot q_{x+1}^i + q_x^i$

$\underline{n=3}$

En este caso aplicamos $P_s^3 = ({}_2p_x^{ij}) \cdot (p_{x+2}^{ij})$ para deducir el caso general.

Recordamos que el objetivo es obtener todas las probabilidades estimadas.

$$P_s^3 = P_s^2 \cdot \begin{pmatrix} p_{x+2}^{aa} & p_{x+2}^{ai} & q_{x+2}^a \\ 0 & p_{x+2}^i & q_{x+2}^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} & p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i & p_x^{aa} \cdot q_{x+1}^a + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i + q_x^a \\ 0 & p_x^i \cdot p_{x+1}^i & p_x^i \cdot q_{x+1}^i + q_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} p_{x+2}^{aa} & p_{x+2}^{ai} & q_{x+2}^a \\ 0 & p_{x+2}^i & q_{x+2}^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= ({}_3p_x^{ij}) = \begin{pmatrix} {}_3p_x^{aa} & {}_3p_x^{ai} & {}_3q_x^a \\ 0 & {}_3p_x^i & {}_3q_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde

1) ${}_3p_x^{aa} = p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} \cdot p_{x+2}^{aa}$

2) ${}_3p_x^{ai} = p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} \cdot p_{x+2}^{ai} + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i) \cdot p_{x+2}^i$

3) ${}_3q_x^a = p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} \cdot q_{x+2}^a + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i) \cdot q_{x+2}^i + (p_x^{aa} \cdot q_{x+1}^a + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i + q_x^a)$

4) ${}_3p_x^i = p_x^i \cdot p_{x+1}^i \cdot p_{x+2}^i$

5) ${}_3q_x^i = p_x^i \cdot p_{x+1}^i \cdot q_{x+2}^i + (p_x^i \cdot q_{x+1}^i + q_x^i)$

La 1) y la 4) es aplicar la propiedad de escindibilidad como para el caso $n=2$.

2) Si despejamos la ecuación nos quedará

$$\begin{aligned} {}_3p_x^{ai} &= p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} \cdot p_{x+2}^{ai} + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i) \cdot p_{x+2}^i \\ &= {}_2p_x^{aa} \cdot p_{x+2}^{ai} + p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} \cdot p_{x+2}^i + p_x^{ai} \cdot {}_2p_{x+1}^i \\ &= {}_0p_x^{aa} \cdot p_x^{ai} \cdot {}_2p_{x+1}^i + p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} \cdot p_{x+2}^i + {}_2p_x^{aa} \cdot p_{x+2}^{ai} \cdot {}_0p_{x+1}^i \\ &= \sum_{k=0}^{2} {}_kp_x^{aa} \cdot p_{x+k}^{ai} \cdot {}_{n-k-1}p_{x+k+1}^i \end{aligned}$$

donde ${}_0p_x^{aa} = 1$ y ${}_0p_{x+1}^i = 1$.

No es díficil entender la fórmula, igual a lo que hemos hecho para $n = 2$:

${}_3p_x^{ai}$ es la probabilidad de que una persona activa de edad x se invalide entre x y $x + 3$, y llegue viva e inválida a la edad $x + 3$. Entonces hay tres posibilidades:

1. El primer año se invalida y sigue vivo e inválido en el segundo y el tercero.
2. El primer año sigue activo y se invalida en el segundo y sigue vivo e inválido en el tercero.
3. En los dos primeros años sigue activo y se invalida en el tercero.

5) La función de fallecimiento para los inválidos es muy similar a la que hemos visto para el colectivo general usando las probabilidades diferidas:

$$\begin{aligned}{}_3q_x^i &= p_x^i \cdot p_{x+1}^i \cdot q_{x+2}^i + (p_x^i \cdot q_{x+1}^i + q_x^i) = {}_2p_x^i \cdot q_{x+2}^i + p_x^i \cdot q_{x+1}^i + q_x^i \\ &= {}_{2/}q_x^i + {}_{1/}q_x^i + q_x^i = \sum_{t=0}^{2} {}_{t/}q_x^i\end{aligned}$$

donde ${}_{t/}q_x^i = {}_tp_x^i \cdot q_{x+t}^i$. (La demostración es muy similar a ${}_{t/}q_x$.)

Observación 5.3.1. No todas probabilidades temporales de fallecimiento se pueden descomponer como la suma de las probabilidades diferidas.

$${}_nq_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}q_x \quad \text{y} \quad {}_nq_x^i = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}q_x^i$$

Sin embargo, ${}_nq_x^a \neq \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}q_x^a$

La razón es porque se trata de un orden compuesto (l_x^{aa}), con lo cual hay dos causas de salida (invalidación y fallecimiento), de manera que antes de fallecer un activo pueda invalidarse.

Por ejemplo, en caso $n = 3$:

$$\begin{aligned}{}_3q_x^a &= p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} \cdot q_{x+2}^a + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i) \cdot q_{x+2}^i + (p_x^{aa} \cdot q_{x+1}^a + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i + q_x^a) \\ &= {}_{2/}q_x^a + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i) \cdot q_{x+2}^i + {}_{1/}q_x^a + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i + q_x^a\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}{}_3q_x^a &= \sum_{t=0}^{2} {}_{t/}q_x^a + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i) \cdot q_{x+2}^i + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i \\ &= \sum_{t=0}^{2} {}_{t/}q_x^a + {}_2p_x^{ai} \cdot q_{x+2}^i + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i \\ &= \sum_{t=0}^{2} {}_{t/}q_x^a + \sum_{t=1}^{2} {}_tp_x^{ai} \cdot q_{x+t}^i\end{aligned}$$

El primer sumatorio nos dice las probabilidades diferidas de que una persona de edad x (que está activo ahora) fallezca en el primer año $(x + 1)$, en el segundo y en el tercero.

El segundo sumatorio nos dice todas las probabilidades de que dicha persona pase del estado activo a inválido y luego fallezca en el siguiente año.

No obstante, se puede interpretar de otra manera:

$$\begin{aligned} {}_3q_x^a &= p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} \cdot q_{x+2}^a + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i) \cdot q_{x+2}^i + (p_x^{aa} \cdot q_{x+1}^a + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^i + q_x^a) \\ &= p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} \cdot q_{x+2}^a + p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} \cdot q_{x+2}^i + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^i \cdot q_{x+2}^i + {}_2q_x^a \end{aligned}$$

donde los tres primeros tériminos nos dicen todas las probabilidades de que dicha persona empiece con el estado activo y fallezca en el tercer año, incluido todo lo que puede pasar dentro de estos años. Y el último es la probabilidad de que dicha persona fallezca en dos próximos años.

Ahora deduimos el caso general:

Caso general ($\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ y $x + n < \omega$)

$$(P_s^n) = \begin{pmatrix} {}_np_x^{aa} & {}_np_x^{ai} & {}_nq_x^a \\ 0 & {}_np_x^i & {}_nq_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde

1) ${}_np_x^{aa} = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}^{aa}$

2) ${}_np_x^{ai} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x^{aa} \cdot p_{x+k}^{ai} \cdot {}_{n-k-1}p_{x+k+1}^i$

3) $$\begin{aligned} {}_nq_x^a &= \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}q_x^a + \sum_{t=1}^{n-1} {}_tp_x^{ai} \cdot q_{x+t}^i \\ &= \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}) \in E_{n-1}} p_x^{aj_1} \cdot p_{x+1}^{j_1 j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot q_{x+n-1}^{j_{n-1}} + {}_{n-1}q_x^a \end{aligned}$$

4) ${}_np_x^i = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}^i$

5) ${}_nq_x^i = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}q_x^i$

donde E_{n-1} es un vector de dimensión $n-1$ que definimos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E_n &= \{(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \mathcal{E}_2^n \mid e_{j+1} \in \{a, i\} \ si\ e_j = a;\ e_{j+1} = i \ si\ e_j = i\ \forall j\} \\ &= \{(a, a, \ldots, a), (a, a, \ldots, i), \ldots, (a, i, \ldots, i), (i, i, \ldots, i)\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

con $\mathcal{E}_2 = \{a, i\}$. Este vector sirve para expresar todos los estados que puede pasar si empieza con el estado activo y fallece entre $x + n - 1$ y $x + n$.

Podéis ver 2) en el libro de Alegre[1] que la obtiene según Hamza, claramente da la misma expresión. Son muy curiosos 2) y 3), las demás son muy parecidas a las del modelo sin contingencia de invalidación.

A partir de estas probabilidades ya podemos construir funciones elementales, como por ejemplo, los capitales diferidos relacionadas con la invalidez, incluso hacer una operación actuarial con estas funciones.

5.4. El modelo modificado

En este último subcapítulo, donde está nuestro objetivo final, planteamos un nuevo modelo modificando la Hipótesis 1 y la 3. Lo estudiaremos igual a lo que hemos hecho para el modelo básico: primero ver la diferencia entre los colectivos, despúes estimar las probabilidades y finalmente generalizarlas. Las hipótesis son:

1. Se considera la posibilidad de retorno a la actividad.[16]

2. Se considera que para cualquier edad, bajo la contingencia de invalidez, todo supervivente es activo o inválido.

3. Se considera que la contingencia de invalidación solo puede darse antes de llegar x_m (edad de jubilación).

De hecho la modificación de la Hipótesis 3 no nos afecta mucho para estudiar ya que en realidad, el modelo es para aplicar a las rentas de invalidación, es decir, a partir de la edad de jubilación (x_m), estas rentas ya no tendrán obligación desde entonces. O mejor dicho, es para que este modelo sea más real y más razonable en el mundo actuarial.

Tenemos en cuenta que la matriz de transición para este modelo, T_s [17] ya no es triangular:

$$T_s = \begin{pmatrix} p_x^{aa} & p_x^{ai} & q_x^a \\ p_x^{ia} & p_x^{ii} & q_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la Hipótesis 1, ahora aparece p_x^{ia} que es la probabilidad de que una persona inválida de edad x se reactive entre x y $x+1$, y llegue viva e activa a la edad $x+1$. Pero antes de introducirla me gustaria estudiar un poco los colectivos.

Recordamos que en el modelo básico tenemos los siguientes colectivos [18]:

	clase	entrada	salida
l_x	orden simple	-	f
l_x^{aa}	orden compuesto	-	i, f
l_x^{ii}	efectivo simple	i	f
l_x^{i}	orden simple	-	f

Cuadro 5: Colectivos del modelo básico

Los primeros cambios suceden en los activos e inválidos: l_x^{aa} y l_x^{ii}. Como hay posibilidad de activarse, estos dos colectivos tienen más entradas y salidas, de manera que l_x^{aa} pasa de un orden compuesto a un efectivo compuesto, y se l_x^{ii} se convierte en un efectivo compuesto:

[16] Aquí suponemos que solo puede reactivarse una vez por año.

[17] Notación: escribimos T_s para expresar la matriz de transición para este modelo actuarial.

[18] Para simplificar las notaciones: a=activar, i=invalidar y f=fallecer.

	clase	entrada	salida
l_x	orden simple	-	f
l_x^{aa}	efectivo compuesto	**a**	i, f
l_x^{ii}	efectivo compuesto	i	**a**, f
l_x^i	orden simple	-	f

Cuadro 6: Colectivos del modelo modificado

Para hacer estimaciones de probabilidades, tenemos los siguientes datos:

1. l_x: el colectivo general de edad x;

2. p_x^i: la tasa anual de fallecimiento de inválidos de edad x;

3. i_x: la probabilidad de invalidación entres las edades x y $x+1$;

Las probabilidades q_x^i y p_x^{ai} se calculan igual que antes:

- $q_x^i = 1 - p_x^i$;

- $p_x^{ai} = \frac{1}{2} \cdot i_x \cdot (1 + p_x^i)$ donde $q_x^{ai} = i_x \cdot \frac{q_x^i}{2}$;

Ahora sale una incidencia en que p_x^i se descompone en

$$p_x^i = p_x^{ia} + p_x^{ii} \tag{5.4}$$

Aquí supongamos que

$$\begin{cases} p_x^{ia} & = & \alpha_x \cdot p_x^i \\ p_x^{ii} & = & (1 - \alpha_x) \cdot p_x^i \end{cases} \tag{5.5}$$

donde $0 < \alpha_x < 1$, α_x es una proporción de probabilidad de que una persona inválida de edad x se reactive entre x y $x+1$ y llegue viva e activa a la edad $x+1$.

Observación 5.4.1. Este α_x que suponemos tiene que ser muy pequeño ya que para una persona inválida sería mucho más fácil (y más real) seguir inválida que reactivarse. Además, α_x depende de x y es decreciente. Efectivamente, cuando la persona inválida es mayor será más díficil reactivarse.

En el modelo básico hemos definido la *función de distribución actuarial de los activos* $S^{aa}(x,n)$ (5.2) como:

$$S^{aa}(x,n) = \frac{l_{x+n}^{aa}}{l_x^{aa}} = {}_n p_x^{aa}$$

Podemos obtener los colectivos l_x^{aa} (en este modelo) a través del proceso que hemos hecho (Cuadro 4)? No! Porque ahora l_x^{aa} se convierte en efectivo compuesto en que hay entradas de personas. Pero podemos hacer un proceso similar con p_x^{ia}: En la parte I añadimos la p_x^{ia}, mientras que en la II tenemos que añadir l_x^{ia}, que es la entrada de personas (las que se reactivan entre x y $x+1$). Podemos verlo en la siguiente tabla:

I						II				
$\mathbf{x}$	$\mathbf{l_x}$	$\mathbf{p_x^i}$	$\mathbf{i_x}$	$\mathbf{p_x^{ai}}$	$\mathbf{p_x^{ia}}$	$\mathbf{l_x^{aa}}$	$\mathbf{l_x^{(ii)}}$	$\mathbf{l_x^{ai}}$	$\mathbf{l_x^{ii}}$	$\mathbf{l_x^{ia}}$
x_0	l_{x_0}	$p_{x_0}^i$	i_{x_0}	$p_{x_0}^{ai}$	$p_{x_0}^{ia}$	l_{x_0}	-	-	0	-
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	l_x	p_x^i	i_x	p_x^{ai}	p_x^{ia}	l_x^{aa}	-	-	l_x^{ii}	-
$x+1$	l_{x+1}	p_{x+1}^i	i_{x+1}	p_{x+1}^{ai}	p_{x+1}^{ia}	5	1	2	$4=1+2-3$	$3=l_x^{ii}\cdot p_x^{ia}$

Cuadro 7: Nuevo proceso de recurrencia para obtener colectivos activos

Equivalentemente,

1 - $l_{x+1}^{(ii)} = l_x^{ii} \cdot p_x^i$.

2 - $l_{x+1}^{ai} = l_x^{aa} \cdot p_x^{ai}$.

3 - $l_{x+1}^{ia} = l_x^{ii} \cdot p_x^{ia}$.

4 - $l_{x+1}^{ii} = l_{x+1}^{(ii)} + l_{x+1}^{ai} - l_{x+1}^{ia}$.

5 - $l_{x+1}^{aa} = l_{x+1} - l_{x+1}^{ii}$.

Observamos que en este modelo los inválidos tienen salidas de personas (l_x^{ia}), por tanto se tiene que restar.

Supongamos que ahora ya tenemos la matriz de transicón con las probabilidades estimadas y queremos generalizarla, es decir, calcular la n-ésima potencia de T_s para obtener las probabilidades en n pasos.

Claramente se puede hacer mediante programación informática, pero nuestro objetivo no es solo tener las expresiones generales, sinó también saber qué significa cada uno y cómo sacarlas.

Hacemos lo mismo que antes, primero veremos casos $n=2$ y $n=3$, luego deduciremos el caso general.

$\underline{n=2}$

$$T_s^2 = \begin{pmatrix} p_x^{aa} & p_x^{ai} & q_x^a \\ p_x^{ia} & p_x^{ii} & q_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{x+1}^{aa} & p_{x+1}^{ai} & q_{x+1}^a \\ p_{x+1}^{ia} & p_{x+1}^{ii} & q_{x+1}^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_x^{aa}\cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ai}\cdot p_{x+1}^{ia} & p_x^{aa}\cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai}\cdot p_{x+1}^{ii} & p_x^{aa}\cdot q_{x+1}^{a} + p_x^{ai}\cdot q_{x+1}^{i} + q_x^a \\ p_x^{ia}\cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ii}\cdot p_{x+1}^{ia} & p_x^{ia}\cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ii}\cdot p_{x+1}^{ii} & p_x^{ia}\cdot q_{x+1}^{a} + p_x^{ii}\cdot q_{x+1}^{i} + q_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= ({}_2p_x^{ij}) = \begin{pmatrix} {}_2p_x^{aa} & {}_2p_x^{ai} & {}_2q_x^a \\ {}_2p_x^{ia} & {}_2p_x^{ii} & {}_2q_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente,

1) ${}_2p_x^{aa} = p_x^{aa}\cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ai}\cdot p_{x+1}^{ia}$

2) ${}_2p_x^{ai} = p_x^{aa}\cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai}\cdot p_{x+1}^{ii}$

3) ${}_2q_x^{a} = p_x^{aa}\cdot q_{x+1}^{a} + p_x^{ai}\cdot q_{x+1}^{i} + q_x^a$

4) ${}_2p_x^{ia} = p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ia}$

5) ${}_2p_x^{ii} = p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ii}$

6) ${}_2q_x^{i} = p_x^{ia} \cdot q_{x+1}^{a} + p_x^{ii} \cdot q_{x+1}^{i} + q_x^{i}$

donde las igualdades 2) y 3) parecen iguales a las del model básico, pero son iguales para cualquier n? De momento las dejamos y hablamos más adelante en el caso $n = 3$.

1) Como existe la posibilidad de reactivarse (o a causa de que l_x^{aa} es un efectivo compuesto), ya no se puede aplicar la propiedad de escindibilidad a ${}_2p_x^{aa}$, hay dos posibiles casos:

1. La persona sigue activa en los próximos dos años.
2. El primer año se invalida y vuelve a activarse en el segundo.

$\Rightarrow \ {}_2p_x^{aa} = p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ia}$

4) Esta es la nueva: ${}_2p_x^{ia}$. Es la probabilidad de que una persona inválida de edad x se reactive entre x y $x+2$, y llegue viva e inválida a la edad $x+2$. Entonces existe dos posibilidades:

1. El primer año se reactiva y sigue siendo activo en el segundo.
2. El primer año sigue inválido y se reactiva en el segundo.

$\Rightarrow \ {}_2p_x^{ia} = p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ia}$

5) ${}_2p_x^{ii}$ pasa lo mismo que ${}_2p_x^{aa}$, en lugar de la activación tenemos invalidación. Es cierto porque las dos cogen efectivos compuestos de manera que tienen las mismas características.

6) ${}_2q_x^{i}$ y ${}_2q_x^{a}$ también tienen la misma estructura, la razón es igual a la de 5).

Veamos ahora el caso $n = 3$, desde aquí podemos obtener mucha información.

<u>$n = 3$</u>

Igual que antes, aplicamos $({}_3p_x^{ij}) = ({}_2p_x^{ij}) \cdot (p_{x+2}^{ij})$ para deducir el caso general.

Recordamos que el objetivo es obtener todas las probabilidades estimadas.

$$T_s^3 = T_s^2 \cdot \begin{pmatrix} p_{x+2}^{aa} & p_{x+2}^{ai} & q_{x+2}^{a} \\ p_{x+2}^{ia} & p_{x+2}^{ii} & q_{x+2}^{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ia} & p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ii} & p_x^{aa} \cdot q_{x+1}^{a} + p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^{i} + q_x^{a} \\ p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ia} & p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ii} & p_x^{ia} \cdot q_{x+1}^{a} + p_x^{ii} \cdot q_{x+1}^{i} + q_x^{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} p_{x+2}^{aa} & p_{x+2}^{ai} & q_{x+2}^{a} \\ p_{x+2}^{ia} & p_{x+2}^{ii} & q_{x+2}^{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= ({}_3p_x^{ij}) = \begin{pmatrix} {}_3p_x^{aa} & {}_3p_x^{ai} & {}_3q_x^{a} \\ {}_3p_x^{ia} & {}_3p_x^{ii} & {}_3q_x^{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde

1) ${}_3p_x^{aa} = (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ia}) \cdot p_{x+2}^{aa} + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ii}) \cdot p_{x+2}^{ia}$

2) ${}_3p_x^{ai} = (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ia}) \cdot p_{x+2}^{ai} + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ii}) \cdot p_{x+2}^{ii}$

3) ${}_3q_x^{a} = (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ia}) \cdot q_{x+2}^{a} + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ii}) \cdot q_{x+2}^{i} + (p_x^{aa} \cdot q_{x+1}^{a}$
$+ p_x^{ai} \cdot q_{x+1}^{i} + q_x^{a})$

4) ${}_3p_x^{ia} = (p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ia}) \cdot p_{x+2}^{aa} + (p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ii}) \cdot p_{x+2}^{ia}$

5) ${}_3p_x^{ii} = (p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ia}) \cdot p_{x+2}^{ai} + (p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ii}) \cdot p_{x+2}^{ii}$

6) ${}_3q_x^{i} = (p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ia}) \cdot q_{x+2}^{a} + (p_x^{ia} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ii} \cdot p_{x+1}^{ii}) \cdot q_{x+2}^{i} + (p_x^{ia} \cdot q_{x+1}^{a}$
$+ p_x^{ii} \cdot q_{x+1}^{i} + q_x^{i})$

Observamaos que 1), 2), 4) y 5) tienen la misma estructura, 3) y 6) pasan lo mismo.

1) se trata de probabildades de que una persona activa de edad x llegue viva e activa en $x+3$, y 2) es la probabilidad de que dicha persona se invalide entre x y $x+3$, y llegue viva e inválida a la edad $x+3$.

Si despejamos 1) nos quedará

$$\begin{aligned} {}_3p_x^{aa} &= (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ia}) \cdot p_{x+2}^{aa} + (p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ii}) \cdot p_{x+2}^{ia} \\ &= p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} \cdot p_{x+2}^{aa} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ia} \cdot p_{x+2}^{aa} + p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{ai} \cdot p_{x+2}^{ia} + p_x^{ai} \cdot p_{x+1}^{ii} \cdot p_{x+2}^{ia} \end{aligned}$$

donde hay 4 posibilidades:

1. Sigue activo en los tres años.

2. El primer año sigue activo, pero se invalida en el segundo y se reactiva en el tercero.

3. El primer año se invalida y se reactiva en el segundo y sigue activo en el tercero.

4. El primer año se invalida y sigue inválido en el segundo pero se reactiva en el tercero.

La clave es fijar el primer estado (activo) y el último (activo) enumerando todos los posibles casos (invalidarse o reactivarse). Por lo tanto,

$${}_3p_x^{aa} = \sum_{j_1, j_2 \in \{a,i\}} p_x^{aj_1} \cdot p_{x+1}^{j_1 j_2} \cdot p_{x+2}^{j_2 a}$$

De la misma manera obtendremos

2) ${}_3p_x^{ai} = \sum_{j_1, j_2 \in \{a,i\}} p_x^{aj_1} \cdot p_{x+1}^{j_1 j_2} \cdot p_{x+2}^{j_2 i}$

4) ${}_3p_x^{ia} = \sum_{j_1, j_2 \in \{a,i\}} p_x^{ij_1} \cdot p_{x+1}^{j_1 j_2} \cdot p_{x+2}^{j_2 a}$

5) ${}_3p_x^{ii} = \sum_{j_1, j_2 \in \{a,i\}} p_x^{ij_1} \cdot p_{x+1}^{j_1 j_2} \cdot p_{x+2}^{j_2 i}$

3) y 6) se tratan de probabildades de que una persona de edad x que está activo (o inválido) ahora, fallecza en los tres próximos años.

Si despejamos 3) nos quedará

$$
\begin{aligned}
{}_3q_x^a &= (p_x^{aa}\cdot p_{x+1}^{aa} + p_x^{ai}\cdot p_{x+1}^{ia})\cdot q_{x+2}^a + (p_x^{aa}\cdot p_{x+1}^{ai} + p_x^{ai}\cdot p_{x+1}^{ii})\cdot q_{x+2}^i + (p_x^{aa}\cdot q_{x+1}^a + \\
&\quad p_x^{ai}\cdot q_{x+1}^i + q_x^a) \\
&= p_x^{aa}\cdot p_{x+1}^{aa}\cdot q_{x+2}^a + p_x^{ai}\cdot p_{x+1}^{ia}\cdot q_{x+2}^a + p_x^{aa}\cdot p_{x+1}^{ai}\cdot q_{x+2}^i + p_x^{ai}\cdot p_{x+1}^{ii}\cdot q_{x+2}^i + \\
&\quad (p_x^{aa}\cdot q_{x+1}^a + p_x^{ai}\cdot q_{x+1}^i + q_x^a)
\end{aligned}
$$

donde hay 7 posibilidades:

1. Sigue activo en los dos primeros años pero fallece en el tercero.
2. El primer año sigue activo, se invalida en el segundo y fallece en el tercero.
3. El primer año se invalida y se reactiva en el segundo y fallece en el tercero.
4. El primer año se invalida y sigue inválido en el segundo pero fallece en el tercero.
5. El primer año sigue activo y fallece en el segundo.
6. El primer año se invalida y fallece en el segundo.
7. Fallece en el primer año.

Las 3 últimas se pueden considerar juntamente como ${}_2q_x^a$, o sea, el caso de que dicha persona que está activo ahora fallece en dos próximos años. Entonces

$$ {}_3q_x^a = \sum_{j_1,j_2\in\{a,i\}} p_x^{aj_1}\cdot p_{x+1}^{j_1j_2}\cdot q_{x+2}^{j_2} + {}_2q_x^a $$

De forma análoga, tendremos

6) ${}_3q_x^i = \sum_{j_1,j_2\in\{a,i\}} p_x^{ij_1}\cdot p_{x+1}^{j_1j_2}\cdot q_{x+2}^{j_2} + {}_2q_x^i$

Observamos que estas dos son muy similares a las cuartro de antes, sin embargo, las diferencias son: en estas dos solo hay que fijar el primer estado; además, se tiene que añadir un caso más, que es la función de fallecmiento temporal de un año menos.

Recordemos que hemos cambiado la Hipótesis 3 creando una edad de jubilación, x_m. Por lo tanto, en este modelo estamos suponiendo que $x+n<x_m$.

Caso general ($\forall n\in\mathbb{N}, n\neq 0$ y $x+n<x_m$)

$$ (T_s^n) = \begin{pmatrix} {}_np_x^{aa} & {}_np_x^{ai} & {}_nq_x^a \\ {}_np_x^{ia} & {}_np_x^{ii} & {}_nq_x^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

donde

1) ${}_np_x^{aa} = \sum_{j_1,\dots,j_{n-1}\in\{a,i\}} p_x^{aj_1}\cdot p_{x+1}^{j_1j_2}\cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}}\cdot p_{x+n-1}^{j_{n-1}a}$

2) ${}_np_x^{ai} = \sum_{j_1,\dots,j_{n-1}\in\{a,i\}} p_x^{aj_1}\cdot p_{x+1}^{j_1j_2}\cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}}\cdot p_{x+n-1}^{j_{n-1}i}$

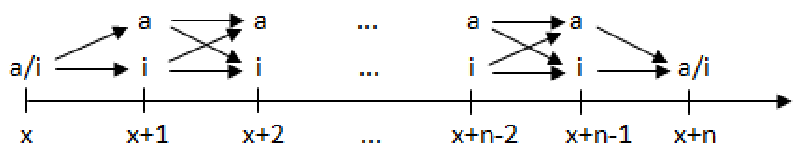
3) ${}_nq_x^a = \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}\in\{a,i\}} p_x^{aj_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot q_{x+n-1}^{j_{n-1}} + {}_{n-1}q_x^a$

4) ${}_np_x^{ia} = \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}\in\{a,i\}} p_x^{ij_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot p_{x+n-1}^{j_{n-1}a}$

5) ${}_np_x^{ii} = \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}\in\{a,i\}} p_x^{ij_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot p_{x+n-1}^{j_{n-1}i}$

6) ${}_nq_x^i = \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}\in\{a,i\}} p_x^{ij_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot q_{x+n-1}^{j_{n-1}} + {}_{n-1}q_x^i$

Vamos a interpretar un poco estas expresiones. Para 1), 2), 4) y 5) tenemos la siguiente gráfica:



Podemos sacar una fórmula general para estas cuatro:

$\forall \alpha, \beta \in \{a, i\}$,

$$ {}_np_x^{\alpha\beta} = \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}\in\{a,i\}} p_x^{\alpha j_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot p_{x+n-1}^{j_{n-1}\beta} $$

Si nos fijamos en el sumatorio será fácil de ver que hay 2^{n-1} términos.

Para las funciones de fallecimiento 3) y 6) se puede hacer algo similiar:

$\forall \gamma \in \{a, i\}$,

$$ {}_nq_x^{\gamma} = \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}\in\{a,i\}} p_x^{\gamma j_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot q_{x+n-1}^{j_{n-1}} + {}_{n-1}q_x^{\gamma} $$

De hecho, es la misma propiedad de probabilidades de fallecimiento que ya hemos demostrado para los colectivos generales (en el Subcapítulo 2.3.):

$$ {}_{m/n}q_x^{\gamma} = {}_{m+n}q_x^{\gamma} - {}_mq_x^{\gamma} $$

donde la probabilidad temporal y diferida de fallecimiento (la parte izquierda) corresponde al sumatorio de la fórmula anterior.

6. Conclusiones

En esta última sección me gustaría dividir las conclusiones en dos partes: la primera se tracta de un resultado resumido del trabajo, y la segunda, quería hacer comentarios sobre este resultado.

A partir del modelo básico relacionado con la invalidez hemos planteado el nuevo modelo, y con Cadena de Markov los hemos estudiado en detalle, sobre todo las probabilidades de transición que servirá para hacer valoración actuarial como rentas de invalidez.

Aquí pongo una esquema para hacer una comparación sencilla entre los dos modelos, incluso la clasificación de los colectivos, la estimación de probabilidades y las fórmulas generales de las probabilidades en n pasos.

	Modelo básico	Modelo modificado
Col.	**Clasificación según entradas y salidas**	
l_x	orden simple	orden simple
l_x^{aa}	orden compuesto	efectivo compuesto
l_x^{ii}	efectivo simple	efectivo compuesto
Prob.	**Estimación** a partir de l_x, p_x^i, i_x y $q_x^{ai} = i_x \cdot \frac{q_x^i}{2}$ (según Hamza)	
p_x^{aa}	l_{x+1}^{aa}/l_x^{aa}	l_{x+1}^{aa}/l_x^{aa}
p_x^{ai}	$\frac{1}{2} \cdot i_x \cdot (1 + p_x^i)$	$\frac{1}{2} \cdot i_x \cdot (1 + p_x^i)$
q_x^a	$1 - p_x^{aa} - p_x^{ai}$	$1 - p_x^{aa} - p_x^{ai}$
p_x^{ia}	-	$\alpha_x \cdot p_x^i$
p_x^{ii}	p_x^i	$(1 - \alpha_x) \cdot p_x^i$
q_x^i	$1 - p_x^i$	$1 - p_x^i$
	Formúlas generales	
${}_np_x^{aa}$	$\prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}^{aa}$	$\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1} \in \{a,i\}} p_x^{aj_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot p_{x+n-1}^{j_{n-1}a}$
${}_np_x^{ai}$	$\sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x^{aa} \cdot p_{x+k}^{ai} \cdot {}_{n-k-1}p_{x+k+1}^{i}$	$\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1} \in \{a,i\}} p_x^{aj_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot p_{x+n-1}^{j_{n-1}i}$
${}_nq_x^{a}$	$\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}) \in E_{n-1}} p_x^{aj_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot q_{x+n-1}^{j_{n-1}} + {}_{n-1}q_x^a$	$\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1} \in \{a,i\}} p_x^{aj_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot q_{x+n-1}^{j_{n-1}} + {}_{n-1}q_x^a$
${}_np_x^{ia}$	-	$\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1} \in \{a,i\}} p_x^{ij_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot p_{x+n-1}^{j_{n-1}a}$
${}_np_x^{ii}$	$\prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}^{i}$	$\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1} \in \{a,i\}} p_x^{ij_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot p_{x+n-1}^{j_{n-1}i}$
${}_nq_x^{i}$	$\sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}q_x^i$	$\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1} \in \{a,i\}} p_x^{ij_1} \cdot p_{x+1}^{j_1j_2} \cdots p_{x+n-2}^{j_{n-2}j_{n-1}} \cdot q_{x+n-1}^{j_{n-1}} + {}_{n-1}q_x^i$

donde las series l_x^{aa} del modelo A y B se obtiene a través de los procesos de recurrencia (Cuadro 4 y Cuadro 7), α_x es la proporción definida en (5.5) y E_n es el vector definido en (5.3).

Observamos que hay limitación de datos ya que las tablas de mortalidad que hemos cogido no disponen mucha información, de manera que hemos de hacer ciertos supuestos como q_x^{ai} (según Hamza) y p_x^{ia}. Espero que podremos construir tablas con más información relacionada con la invalidez.

Otra restricción es que lo estudiamos en el enfoque discreto. Recordemos que también hay seguros continuos. Como se plantea el modelo? Con que herramientas matemáticas se puede estudiar? Esto sería un trabajo muy interesante, y seguramente, más complicado.

Referencias

[1] Alegre, Antonio: *VALORACIÓN ACTUARIAL DE PRESTACIONES RELACIONADAS CON LA INVALIDEZ*, Universitat de Barcelona, 1990.

[2] Die Eidgenössische Versicherungskasse: *TECHNISCHE GRUNDLAGEN DER EIDGENÖSSISCHEN VERSICHERUNGSKASSE - EVK 1960*, Der Eidg. Versicherungskasse Bern 1960.

[3] Ayuso, Mercedes; Corrales, H.; Guillén, M.; Pérez-Marín, A.M.; Rojo, J.L. *ESTADÍSTICA ACTUARIAL VIDA*, 2^{a} ed. Edicions Universitat de Barcelona, 2007

[4] Sandoya, Fernando: *MATEMÁTICAS ACTUARIALES Y OPERACIONES DE SEGUROS*, segunda edición, ESPOL, 2007.

[5] BOE.es - Documento BOE-A-2012-9776, *ANEXO: Tablas PASEM 2010*, 6 de jul. 2012.
`https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2012-9776`

[6] Wikipedia contributors: *Cadena de Márkov* - Wikipedia, la enciclopedia libre, 16 de sep. 2017.
`https://es.wikipedia.org/wiki/Cadena_de_Márkov`

[7] Puerto, Justo: *MODELOS ESTOCÁSTICOS DE LA I.O. II - Capítulo 2: Cadena de Márkov* , Universidad de Sevilla.
`http://www.cimat.mx/ jortega/MaterialDidactico/modestoI11/CMarkov1v1.pdf`

[8] Sánchez, Joaquín: *MODELOS ESTOCÁSTICOS I - Capítulo 3: Cadena de Márkov* , Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)
`https://grupo.us.es/gpb97/curri_sevilla/doc/meio2.pdf`

Anexo: Tablas PASEM 2010

Edad	q_x (hombre)	q_x (mujer)	l_x (hombre)	l_x (mujer)	p_x (hombre)	p_x (mujer)
0	0,005807	0,004744	1000000	1000000	0,994193	0,994193
1	0,000418	0,000376	994193	995256	0,999582	0,999582
2	0,000349	0,000307	993777,4273	994881,7837	0,999651	0,999651
3	0,000287	0,000245	993430,599	994576,355	0,999713	0,999713
4	0,000236	0,000195	993145,4844	994332,6838	0,999764	0,999764
5	0,000200	0,000157	992911,1021	994138,789	0,999800	0,999800
6	0,000177	0,000132	992712,5199	993982,7092	0,999823	0,999823
7	0,000165	0,000118	992536,8098	993851,5034	0,999835	0,999835
8	0,000159	0,000113	992373,0412	993734,229	0,999841	0,999841
9	0,000159	0,000115	992215,2539	993621,937	0,999841	0,999841
10	0,000169	0,000123	992057,4916	993507,6705	0,999831	0,999831
11	0,000191	0,000134	991889,8339	993385,469	0,999809	0,999809
12	0,000232	0,000149	991700,383	993252,3554	0,999768	0,999768
13	0,000294	0,000169	991470,3085	993104,3608	0,999706	0,999706
14	0,000379	0,000194	991178,8162	992936,5261	0,999621	0,999621
15	0,000486	0,000223	990803,1594	992743,8965	0,999514	0,999514
16	0,000604	0,000253	990321,6291	992522,5146	0,999396	0,999396
17	0,000720	0,000279	989723,4748	992271,4064	0,999280	0,999280
18	0,000719	0,000300	989010,8739	991994,5627	0,999281	0,999281
19	0,000732	0,000312	988299,7751	991696,9643	0,999268	0,999268
20	0,000748	0,000318	987576,3397	991387,5548	0,999252	0,999252
21	0,000765	0,000319	986837,6326	991072,2936	0,999235	0,999235
22	0,000785	0,000317	986082,7018	990756,1415	0,999215	0,999215
23	0,000803	0,000315	985308,6269	990442,0718	0,999197	0,999197
24	0,000819	0,000317	984517,424	990130,0826	0,999181	0,999181
25	0,000830	0,000322	983711,1043	989816,2113	0,999170	0,999170
26	0,000831	0,000301	982894,6241	989497,4905	0,999169	0,999169
27	0,000823	0,000290	982077,8386	989199,6518	0,999177	0,999177
28	0,000807	0,000284	981269,5886	988912,7839	0,999193	0,999193
29	0,000785	0,000282	980477,704	988631,9326	0,999215	0,999215
30	0,000767	0,000277	979708,029	988353,1384	0,999233	0,999233
31	0,000755	0,000301	978956,5929	988079,3646	0,999245	0,999245
32	0,000755	0,000328	978217,4807	987781,9527	0,999245	0,999245
33	0,000774	0,000362	977478,9265	987457,9603	0,999226	0,999226
34	0,000818	0,000414	976722,3578	987100,5005	0,999182	0,999182
35	0,000888	0,000478	975923,3989	986691,8409	0,999112	0,999112
36	0,000974	0,000556	975056,779	986220,2022	0,999026	0,999026
37	0,001070	0,000641	974107,0737	985671,8637	0,998930	0,998930
38	0,001170	0,000732	973064,7791	985040,0481	0,998830	0,998830
39	0,001274	0,000848	971926,2933	984318,9988	0,998726	0,998726
40	0,001389	0,000978	970688,0592	983484,2962	0,998611	0,998611
41	0,001530	0,001117	969339,7735	982522,4486	0,998470	0,998470
42	0,001710	0,001251	967856,6836	981424,971	0,998290	0,998290
43	0,001927	0,001370	966201,6487	980197,2084	0,998073	0,998073
44	0,002173	0,001477	964339,7781	978854,3382	0,997827	0,997827

45	0,002439	0,001586	962244,2678	977408,5704	0,997561	0,997561
46	0,002727	0,001707	959897,354	975858,4004	0,997273	0,997273
47	0,003048	0,001850	957279,7139	974192,6101	0,996952	0,996952
48	0,003393	0,002017	954361,9254	972390,3537	0,996607	0,996607
49	0,003774	0,002218	951123,7754	970429,0424	0,996226	0,996226
50	0,004187	0,002452	947534,2342	968276,6308	0,995813	0,995813
51	0,004634	0,002725	943566,9084	965902,4165	0,995366	0,995366
52	0,005092	0,003012	939194,4193	963270,3324	0,994908	0,994908
53	0,005572	0,003280	934412,0414	960368,9622	0,994428	0,994428
54	0,006094	0,003517	929205,4975	957218,952	0,993906	0,993906
55	0,006676	0,003732	923542,9192	953852,4129	0,993324	0,993324
56	0,007300	0,003947	917377,3466	950292,6357	0,992700	0,992700
57	0,007959	0,004169	910680,492	946541,8307	0,992041	0,992041
58	0,008602	0,004393	903432,386	942595,6978	0,991398	0,991398
59	0,009213	0,004598	895661,0606	938454,8749	0,990787	0,990787
60	0,009793	0,004801	887409,3352	934139,8594	0,990207	0,990207
61	0,010350	0,005030	878718,9356	929655,0539	0,989650	0,989650
62	0,010892	0,005293	869624,1946	924978,889	0,989108	0,989108
63	0,011451	0,005598	860152,2479	920082,9757	0,988549	0,988549
64	0,012051	0,005984	850302,6445	914932,3512	0,987949	0,987949
65	0,012703	0,006501	840055,6473	909457,396	0,987297	0,987297
66	0,014059	0,007148	829384,4204	903545,0135	0,985941	0,985941
67	0,015664	0,007931	817724,1049	897086,4737	0,984336	0,984336
68	0,017562	0,008878	804915,2745	889971,6809	0,982438	0,982438
69	0,019807	0,009992	790779,3525	882070,5123	0,980193	0,980193
70	0,022460	0,011267	775116,3858	873256,8638	0,977540	0,977540
71	0,025605	0,012705	757707,2718	863417,8787	0,974395	0,974395
72	0,029354	0,014313	738306,1771	852448,1545	0,970646	0,970646
73	0,033833	0,017578	716633,9376	840247,0641	0,966167	0,966167
74	0,039202	0,021666	692388,0616	825477,2012	0,960798	0,960798
75	0,045637	0,026885	665245,0648	807592,4122	0,954363	0,954363
76	0,053345	0,030905	634885,2758	785880,2902	0,946655	0,946655
77	0,062555	0,035669	601017,3207	761592,6598	0,937445	0,937445
78	0,073532	0,041312	563420,6822	734427,4112	0,926468	0,926468
79	0,086547	0,047972	521991,2326	704086,746	0,913453	0,913453
80	0,096814	0,055808	476814,4574	670310,2966	0,903186	0,903186
81	0,108179	0,064946	430652,1425	632901,6196	0,891821	0,891821
82	0,120688	0,075514	384064,6244	591797,191	0,879312	0,879312
83	0,134417	0,087641	337712,633	547108,2179	0,865583	0,865583
84	0,149484	0,101439	292318,314	499159,1066	0,850516	0,850516
85	0,166049	0,117042	248621,4032	448524,906	0,833951	0,833951
86	0,184195	0,134524	207338,0678	396028,6539	0,815805	0,815805
87	0,203925	0,153931	169147,4324	342753,2953	0,796075	0,796075
88	0,225150	0,175256	134654,0422	289992,9378	0,774850	0,774850
89	0,247704	0,198432	104336,6846	239169,9355	0,752296	0,752296
90	0,271358	0,223304	78492,0705	191710,9669	0,728642	0,728642
91	0,295823	0,249693	57192,61924	148901,1411	0,704177	0,704177
92	0,320854	0,277406	40273,72704	111721,5685	0,679146	0,679146
93	0,346242	0,306291	27351,74062	80729,33506	0,653758	0,653758
94	0,371835	0,336236	17881,41924	56002,66629	0,628165	0,628165

95	0,397550	0,367161	11232,48172	37172,55379	0,602450	0,602450
96	0,423336	0,398976	6767,008612	23524,24177	0,576664	0,576664
97	0,449171	0,431530	3902,290254	14138,63388	0,550829	0,550829
98	0,475035	0,464635	2149,494639	8037,389204	0,524965	0,524965
99	0,500918	0,498080	1128,409453	4302,936871	0,499082	0,499082
100	0,526808	0,531667	563,1688466	2159,730074	0,473192	0,473192
101	0,583877	0,559229	266,4869928	1011,472865	0,416123	0,416123
102	0,618746	0,595678	110,8913669	445,8279061	0,381254	0,381254
103	0,654849	0,633277	42,27777721	180,2580307	0,345151	0,345151
104	0,692209	0,672036	14,59221708	66,10476578	0,307791	0,307791
105	0,730838	0,711950	4,491353087	21,6799834	0,269162	0,269162
106	0,770736	0,753003	1,20890158	6,24491922	0,229264	0,229264
107	0,811884	0,795159	0,277157612	1,542476313	0,188116	0,188116
108	0,854241	0,838361	0,052137781	0,31596239	0,145759	0,145759
109	0,897733	0,882519	0,007599551	0,051071845	0,102267	0,102267
110	0,942245	0,927507	0,000777183	0,005999971	0,057755	0,057755
111	0,987609	0,973152	4,48862E-05	0,000434956	0,012391	0,012391
112	1,000000	1,000000	5,56185E-07	1,16777E-05	0,000000	0,000000
113	1,000000	1,000000	0	0	0,000000	0,000000
114	1,000000	1,000000	0	0		
115	1,000000	1,000000	0	0		
116	1,000000	1,000000	0	0		
117	1,000000	1,000000	0	0		
118	1,000000	1,000000	0	0		
119	1,000000	1,000000	0	0		
120	1,000000	1,000000	0	0		